Esercizi interattivi di Matematica Generale. Ottimizzazione in $\mathbb{R}^2$

Francesco Brega – Grazia Messineo

Istruzioni

Per iniziare i quiz cliccare “Inizio Test”, quando si è finito, per ottenere la valutazione, cliccare su “Fine Test”.

Dove viene richiesta una risposta scritta usare le seguenti regole:

- Usare `*` per indicare la moltiplicazione: scrivere 4*x per $4x$;
- Usare `^` per indicare le potenze: scrivere `4*x^3` per $4x^3$; `12*x^-6` per $12x^{-6}$;
- Usare parentesi per delimitare l’argomento di una funzione; cioè scrivere `cos(x)` e non `cos x`;
- Usare parentesi per indicare il *risultato* di un’operazione: scrivere `4*x*(x^2+1)^3` per $4x(x^2+1)^3$; `4^(2*x+1)` per 4^{2x+1}; `(cos(x))^2` per $(\cos(x))^2$. *Non* scrivere `cos^2(x)` per $\cos^2(x)$, scrivere `(cos(x))^2`!
- Si possono usare parentesi quadre `[ ]` o graffe `{ }`, per delimitare un’espressione matematica.
- Funzioni che possono essere usate:
  - Trigonometriche: `sin` (seno), `cos` (coseno), `tan` (tangente), `cot` (cotangente), `sec` (secante), `csc` (cosecante);
  - Trigonometriche Inverse: `asin` (arcoseno), `acos` (arcocoseno), `atan` (arcotangente);
  - Logaritmiche: `ln` (logaritmo naturale), o `log`;
  - Esponenziale: la funzione esponenziale e^x, può essere immessa come `exp(x)` o come `e^x`.
  - Il valore assoluto, `abs(·)` può anche essere scritto nel modo solito `|·|`; cioè si può scrivere `abs(x)` o `|x|`.
  - Altre: `sqrt`, si scrive `sqrt(x)` per $\sqrt{x}$ (o si usa la notazione esponenziale: `x^(1/2)`).

Quando la risposta viene immessa il programma fa un qualche controllo per determinare se è un’espressione matematica corretta: per esempio, se si scrive `san(x)`, la funzione ‘`san`’ non sarà riconosciuta come un’espressione valida e ci sarà un messaggio di errore e la risposta non è considerata errata. C’è anche un controllo sulle parentesi: `((x^4+1) + sin(x)^2` sarà indicato come errore di sintassi.

Indietro
Pieno Schermo
Chiudere
Uscire

Importante: Nella risposta bisogna sempre usare la variabile indipendente data nel testo dell'esercizio: se il testo usa x, si usa `x`; se l'enunciato del problema usa t, si usa `t` nella risposta. Immettere una funzione di t quando il programma si aspetta una funzione di x, avrà certamente come risultato "risposta sbagliata".

Importante: Dopo aver dato la risposta premere il tasto invio o cliccare col mouse su un'area vuota della pagina.
Simboli: Nelle correzioni il simbolo ✔ indica che lo studente ha dato la risposta corretta; un ✘, indica una risposta errata, in questo caso, la risposta corretta è indicata con ●.

Se il quiz ha una soluzione, la casella della risposta esatta ha un riquadro verde: cliccando e premendo Shift sulla casella si va alla pagina della soluzione.

Nel caso di risposta scritta, la risposta esatta appare in un riquadro in fondo all'esercizio.

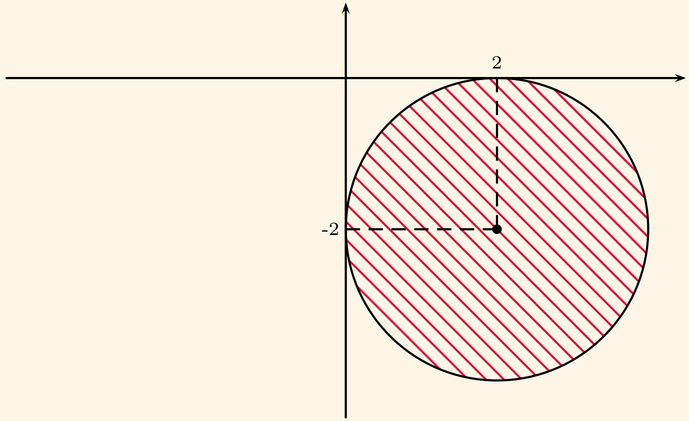
Quiz n. 1

Per iniziare il quiz cliccare "Inizio Test", quando si è finito, per ottenere la valutazione, cliccare su "Fine Test".

Rispondere a tutte le domande del quiz. È sempre possibile (prima di cliccare su "Fine Test") modificare le proprie risposte.

Inizio Quiz

1. Nella seguente figura



è rappresentato il dominio della funzione

☐ $f(x,y) = \ln(-x^2 - y^2 + 4x - 4y - 4)$ ☐ $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4)$

☐ $f(x,y) = \sqrt{-x^2 - y^2 + 4x - 4y - 4}$ ☐ $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4}$

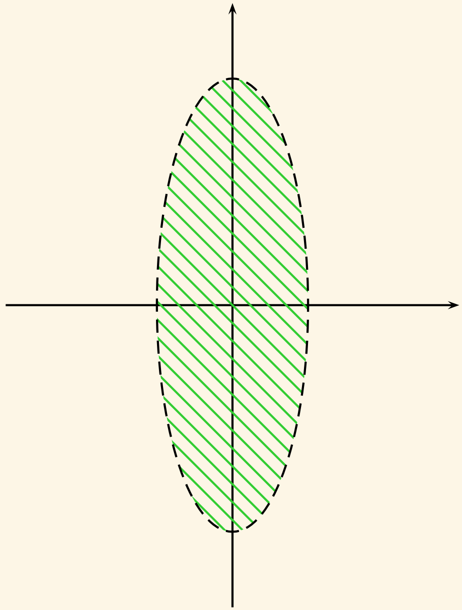
Indietro

Pieno Schermo

Chiudere

Uscire

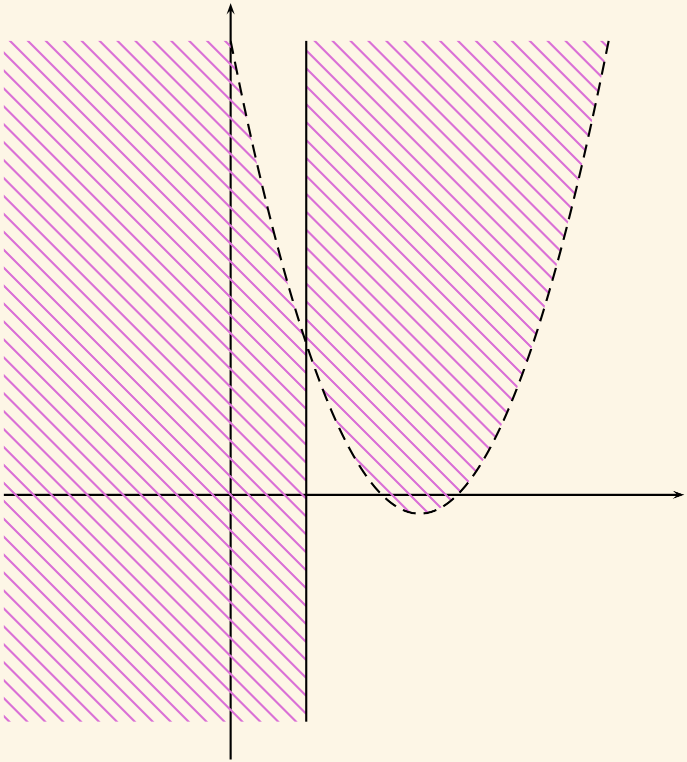
2. Nella seguente figura



è rappresentato il dominio della funzione

- ☐ $f(x, y) = \ln(9 - 9x^2 - y^2)$
- ☐ $f(x, y) = \ln(9x^2 + y^2 - 9)$
- ☐ $f(x, y) = \sqrt{9 - 9x^2 - y^2}$
- ☐ $f(x, y) = \sqrt{9x^2 + y^2 - 9}$

3. Nella seguente figura



è rappresentato il dominio della funzione

☐ $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{y - x^2 + 5x - 6}{x - 1}}$

☐ $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{y - x^2 + 5x - 6}}$

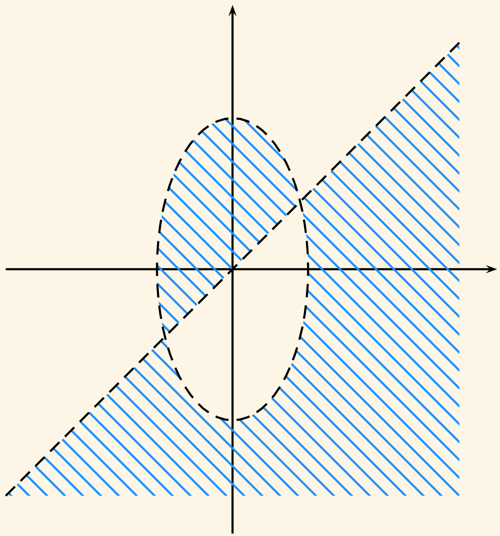
☐ $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x - 1}{y - x^2 + 5x - 6}\right)$

☐ $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{y - x^2 + 5x - 6}{x - 1}\right)$

4. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = (4 - 4x^2 - y^2)(y - x)$$

Nella seguente figura



l'area tratteggiata rappresenta

- [ ] Il dominio della funzione
- [ ] L'insieme in cui la funzione è positiva
- [ ] L'insieme in cui la funzione è negativa
- [ ] Nessuna delle precedenti risposte è corretta

Fine Quiz

Punteggio: Correggere

Quiz n. 2

Per iniziare il quiz cliccare "Inizio Test", quando si è finito, per ottenere la valutazione, cliccare su "Fine Test".

Rispondere a tutte le domande del quiz. È sempre possibile (prima di cliccare su "Fine Test") modificare le proprie risposte.

Inizio Quiz

1. Il gradiente della funzione

$$f(x, y) = xy^2 + 3xy - x^2 + 9$$

nel punto $(1, -2)$ vale

- ☐ $\nabla f(1, -2) = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\nabla f(1, -2) = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\nabla f(1, -2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\nabla f(1, -2) = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

2. Il gradiente della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - 3y^2}$$

nel punto $(4, 0)$ vale

- ☐ $\nabla f(4, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\nabla f(4, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\nabla f(4, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- ☐ $\nabla f(4, 0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. Il gradiente della funzione

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2 - y^2}$$

nel punto $(-1, 1)$ vale

- ☐ $\nabla f(-1, 1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
- ☐ $\nabla f(-1, 1) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$
- ☐ $\nabla f(-1, 1) = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$
- ☐ $\nabla f(-1, 1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

4. Il gradiente della funzione

$$f(x,y) = \ln(4 + 3xy^2)$$

nel punto $(1,1)$ vale

- ☐ $\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 6/7 \end{bmatrix}$
- ☐ $\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} -3/7 \\ 6/7 \end{bmatrix}$
- ☐ $\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 3/7 \\ -6/7 \end{bmatrix}$
- ☐ $\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} -3/7 \\ -6/7 \end{bmatrix}$

Fine Quiz

Punteggio: Correggere

Quiz n. 3

Per iniziare il quiz cliccare "Inizio Test", quando si è finito, per ottenere la valutazione, cliccare su "Fine Test".

Rispondere a tutte le domande del quiz. È sempre possibile (prima di cliccare su "Fine Test") modificare le proprie risposte.

Inizio Quiz

1. Per la funzione

$$f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 - x - 2y$$

si ha

- ☐ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$ punto di massimo
- ☐ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$ punto di minimo
- ☐ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$ punto di sella
- ☐ nessuna delle altre risposte è corretta

2. Per la funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{2x^2 + 3y^2}$$

si ha

- ☐ $(0, 0)$ punto di massimo
- ☐ $(0, 0)$ punto di minimo
- ☐ $(0, 0)$ punto di sella
- ☐ nessuna delle altre risposte è corretta

3. Per la funzione

$$f(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + kxy;\ k \in \mathbb{R}$$

si ha

- ☐ $(0, 0)$ punto di sella $\forall k$
- ☐ $(0, 0)$ punto di minimo $\forall k$
- ☐ $(0, 0)$ punto di massimo $\forall k$
- ☐ f non ammette punti stazionari

4. Per la funzione

$$f(x,y) = kx^2 + y^2 - 2x + 3y;\ k \in \mathbb{R};\ k \neq 0$$

si ha

- ☐ $\left(\frac{1}{k}, -\frac{3}{2}\right)$ punto di sella per $k < 0$, punto di minimo per $k > 0$
- ☐ $\left(\frac{1}{k}, -\frac{3}{2}\right)$ punto di minimo $\forall k$
- ☐ $\left(\frac{1}{k}, -\frac{3}{2}\right)$ punto di sella per $k > 0$, punto di minimo per $k < 0$
- ☐ $\left(\frac{1}{k}, -\frac{3}{2}\right)$ punto di sella $\forall k$

Fine Quiz

Punteggio: Correggere

Quiz n. 4

Per iniziare il quiz cliccare "Inizio Test", quando si è finito, per ottenere la valutazione, cliccare su "Fine Test".

Rispondere a tutte le domande del quiz. È sempre possibile (prima di cliccare su "Fine Test") modificare le proprie risposte.

Inizio Quiz

1. Per la funzione

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{9y^2 - 6xy - x}$$

nell'insieme

$$S = \{(x, y) : x - y - 1 = 0\}$$

si ha

- $\left(\frac{13}{6}, \frac{7}{6}\right)$ punto di massimo
- $\left(\frac{13}{6}, \frac{7}{6}\right)$ punto di minimo
- $\left(\frac{7}{6}, \frac{13}{6}\right)$ punto di massimo
- $\left(\frac{7}{6}, \frac{13}{6}\right)$ punto di minimo

2. Per la funzione

$$f(x, y) = 4 - x - y^2$$

nell'insieme

$$S = \left\{(x, y) : x^2 - 1 = 0\right\}$$

si ha

- $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ punti di minimo
- $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ punti di massimo
- $(1, 0)$ punto di massimo
- $(-1, 0)$ punto di minimo

3. Per la funzione

$$f(x,y) = 2x - y$$

nell'insieme

$$S = \left\{(x,y) : 4x^2 + y^2 - 1 = 0\right\}$$

si ha

- ☐ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ punti di minimo
- ☐ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ punti di massimo
- ☐ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ punto di massimo; $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ punto di minimo.
- ☐ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ punto di minimo; $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ punto di massimo.

Soluzioni dei Quiz

Soluzione della domanda 1 del quiz n. 1:
Escludiamo le due funzioni logaritmiche, perché i punti lungo la circonferenza dovrebbero essere esclusi.

Per la funzione $f(x, y) = \sqrt{-x^2 - y^2 + 4x - 4y - 4}$ si ha:

$$-x^2 - y^2 + 4x - 4y - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 \leq 0$$

La disequazione è soddisfatta da tutti i punti interni alla circonferenza di centro $(2, -2)$ e raggio 2, compresi i punti sul bordo.

Fine Quiz

Soluzione della domanda 2 del quiz n. 1:
Escludiamo le due funzioni irrazionali, perché i punti lungo l'ellisse dovrebbero essere inclusi.

Per la funzione $f(x, y) = \ln(9 - 9x^2 - y^2)$ si ha:

$$9 - 9x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow 9x^2 + y^2 - 9 < 0$$

La disequazione è soddisfatta da tutti i punti interni all'ellisse di semiassi 1 e 3 rispettivamente, esclusi i punti sul bordo.

Fine Quiz

Indietro

Pieno Schermo

Chiudere

Uscire

Soluzione della domanda 3 del quiz n. 1:
Escludiamo le due funzioni logaritmiche, perché sia i punti lungo la retta che quelli lungo la parabola dovrebbero essere esclusi.

Per la funzione $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x-1}{y-x^2+5x-6}}$ si ha:

$$\frac{x-1}{y-x^2+5x-6} \geq 0$$

La disequazione può essere risolta studiando separatamente il segno del numeratore e del denominatore. Il dominio è dato dalle regioni del piano in cui i segni sono concordi.

Fine Quiz

Indietro

Pieno Schermo

Chiudere

Uscire

Soluzione della domanda 4 del quiz n. 1:
Il dominio della funzione è $\mathbb{R}^2$, quindi la prima risposta è da escludere.

Per determinare il segno della funzione, occorre risolvere la disequazione

$$(4-4x^2-y^2)(y-x)>0$$

che risulta soddisfatta dai punti del piano tratteggiati in figura.

Quindi la regione tratteggiata rappresenta l'insieme di positività della funzione assegnata.

Fine Quiz

Soluzione della domanda 1 del quiz n. 2:
Il gradiente della funzione è

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} y^2 + 3y - 2x \\ 2xy + 3x \end{bmatrix}$$

quindi il gradiente valutato nel punto $(1,-2)$ vale

$$\nabla f(1,-2) = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Fine Quiz

Soluzione della domanda 2 del quiz n. 2:
Il gradiente della funzione è

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2-3y^2}} \\ -\frac{3y}{\sqrt{x^2-3y^2}} \end{bmatrix}$$

quindi il gradiente valutato nel punto $(1,-2)$ vale

$$\nabla f(2,0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fine Quiz

Soluzione della domanda 3 del quiz n. 2:

Il gradiente della funzione è

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x\mathrm{e}^{x^2-y^2} \\ -2y\mathrm{e}^{x^2-y^2} \end{bmatrix}$$

quindi il gradiente valutato nel punto $(1,-2)$ vale

$$\nabla f(-1,1) = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Fine Quiz

Soluzione della domanda 4 del quiz n. 2:

Il gradiente della funzione è

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{3y^2}{4+3xy^2} \\ \dfrac{6xy}{4+3xy^2} \end{bmatrix}$$

quindi il gradiente valutato nel punto $(1,1)$ vale

$$\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} {}^3/_7 \\ \\ {}^6/_7 \end{bmatrix}$$

Fine Quiz

Soluzione della domanda 1 del quiz n. 3:
La funzione è definita su $\mathbb{R}^2$. Il gradiente della funzione è

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 8x-1 \\ 4y-2 \end{bmatrix}$$

Il gradiente si annulla nel punto $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$.

La matrice Hessiana è

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Poichè $\det H = 32 > 0$ e $\dfrac{d^2 f}{d\, x^2} = 8 > 0$, il punto è di minimo per f. Fine Quiz

Soluzione della domanda 2 del quiz n. 3:
La funzione è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Il gradiente della funzione è

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{4x}{2x^2+3y^2} \\ -\frac{6y}{2x^2+3y^2} \end{bmatrix}$$

Il gradiente si annulla nel punto $(0,0)$, che però è escluso dal dominio.
Quindi la funzione non presenta punti stazionari. Fine Quiz

Soluzione della domanda 3 del quiz n. 3:

La funzione è definita su $\mathbb{R}^2$. Il gradiente della funzione è

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 4x + ky \\ -2y + kx \end{bmatrix}$$

Il gradiente si annulla nel punto $(0,0)$, per ogni valore di k.

La matrice Hessiana risulta

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 4 & k \\ k & -2 \end{bmatrix}$$

Poichè si ha $\det H = -8 - k^2 < 0$, $\forall k$, il punto $(0,0)$ è punto di sella per f per ogni valore di k.

Fine Quiz

Indietro

Pieno Schermo

Chiudere

Uscire

Soluzione della domanda 4 del quiz n. 3:
La funzione è definita su $\mathbb{R}^2$. Il gradiente della funzione è

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2kx-2 \\ 2y-3 \end{bmatrix}$$

Il gradiente si annulla nel punto $\left(\frac{1}{k}, -\frac{3}{2}\right)$.

La matrice Hessiana risulta

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si ha $\det H = 4k$.

Esso risulta positivo per $k > 0$ e negativo per $k < 0$.

Quindi per $k < 0$ il punto $\left(\frac{1}{k}, -\frac{3}{2}\right)$ è punto di sella.

Per $k > 0$ è positiva anche $\dfrac{d^2 f}{d\,x^2} > 0$, quindi il punto $\left(\frac{1}{k}, -\frac{3}{2}\right)$ è punto di minimo. Fine Quiz

Soluzione della domanda 1 del quiz n. 4:
Usando il metodo di sostituzione, esplicitiamo nel vincolo la variabile y, ottenendo

$$y = x - 1$$

La funzione diventa pertanto

$$h(x) = f(x, x-1) = \mathrm{e}^{3x^2-13x+9}$$

Si ha

$$h'(x) = (6x-13)\mathrm{e}^{3x^2-13x+9}$$

e quindi

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13}{6};\ h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{13}{6}$$

Il punto $x = \frac{13}{6}$ è di minimo per h, quindi il punto $\left(\frac{13}{6}, \frac{7}{6}\right)$ è di minimo vincolato per f.

Fine Quiz

Soluzione della domanda 2 del quiz n. 4:

La Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 4 - x - y^2 - \lambda(x^2 - 1)$$

Quindi

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = -1 - 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = -2y = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = -x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni

$$\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \\ \lambda = \mp \frac{1}{2} \end{cases}$$

La matrice Hessiana orlata è

$$\overline{H}(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -2x & 0 \\ -2x & -2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Poiché $\det\left(\overline{H}\right) = 8x^2$, i punti $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ sono punti di massimo vincolato per f. Fine Quiz

Soluzione della domanda 3 del quiz n. 4:

La Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2x - y - \lambda(4x^2 + y^2 - 1)$$

Quindi

$$\begin{cases} \mathcal{L'}_x = 2 - 8\lambda x = 0 \\ \mathcal{L'}_y = -1 - 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L'}_\lambda = -4x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni

$$\begin{cases} x = \pm\frac{\sqrt{2}}{4} \\ y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

La matrice Hessiana orlata è

$$\overline{H}(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -8x & -2y \\ -8x & -8\lambda & 0 \\ -2y & 0 & -2\lambda \end{bmatrix}$$

Poiché $\det\left(\overline{H}\right) = 32\lambda y^2 + 128\lambda x^2$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è punto di minimo e $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è punto di massimo per f.

Fine Quiz

Indietro

Pieno Schermo

Chiudere

Uscire