

# Esercizi interattivi di Matematica Generale.

## Algebra Lineare

Francesco Brega – Grazia Messineo



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

## ISTRUZIONI

**Per iniziare i quiz cliccare “Inizio Test”, quando si è finito, per ottenere la valutazione, cliccare su “Fine Test”.**

Dove viene richiesta una risposta scritta usare le seguenti regole:

- Usare **\*** per indicare la moltiplicazione: scrivere  $4*x$  per  $4x$ ;
- Usare **^** per indicare le potenze: scrivere  $4*x^3$  per  $4x^3$ ;  $12*x^{-6}$  per  $12x^{-6}$ ;
- Usare parentesi per delimitare l'argomento di una funzione; cioè scrivere **cos(x)** e non **cos x**;
- Usare parentesi per indicare il *risultato* di un'operazione: scrivere  $4*x*(x^2+1)^3$  per  $4x(x^2+1)^3$ ;  $4^{(2*x+1)}$  per  $4^{2x+1}$ ;  $(\cos(x))^2$  per  $(\cos(x))^2$ . *Non* scrivere **cos^2(x)** per  $\cos^2(x)$ , scrivere **(cos(x))^2**!
- Si possono usare parentesi quadre [ ] o graffe { }, per delimitare un'espressione matematica.
- Funzioni che possono essere usate:
  - Trigonometriche: **sin** (seno), **cos** (coseno), **tan** (tangente), **cot** (cotangente), **sec** (secante), **csc** (cosecante);
  - Trigonometriche Inverse: **asin** (arcoseno), **acos** (arcocoseno), **atan** (arcotangente);
  - Logaritmiche: **ln** (logaritmo naturale), o **log**;
  - Esponenziale: la funzione esponenziale  $e^x$ , può essere immessa come **exp(x)** o come **e^x**.
  - Il valore assoluto, **abs(·)** può anche essere scritto nel modo solito  $|\cdot|$ ; cioè si può scrivere **abs(x)** o **|x|**.
  - Altre: **sqrt**, si scrive **sqrt(x)** per  $\sqrt{x}$  (o si usa la notazione esponenziale:  $x^{(1/2)}$ ).

Quando la risposta viene immessa il programma fa un qualche controllo per determinare se è un'espressione matematica corretta: per esempio, se si scrive **san(x)**, la funzione 'san' non sarà riconosciuta come un'espressione valida e ci sarà un messaggio di errore e la risposta non è considerata errata. C'è anche un controllo sulle parentesi:  $((x^4+1) + \sin(x)^2$  sarà indicato come errore di sintassi.



Indietro

Pieno Schermo

Chiudere

Uscire

**Importante:** Nella risposta bisogna sempre usare la variabile indipendente data nel testo dell'esercizio: se il testo usa  $x$ , si usa  $x$ ; se l'enunciato del problema usa  $t$ , si usa  $t$  nella risposta. Immettere una funzione di  $t$  quando il programma si aspetta una funzione di  $x$ , avrà certamente come risultato "risposta sbagliata".

**Importante:** Dopo aver dato la risposta premere il tasto invio o cliccare col mouse su un'area vuota della pagina.

**Simboli:** Nelle correzioni il simbolo ✓ indica che lo studente ha dato la risposta corretta; un ✗, indica una risposta errata, in questo caso, la risposta corretta è indicata con ●.

Se il quiz ha una soluzione, la casella della risposta esatta ha un riquadro verde: cliccando e premendo Shift sulla casella si va alla pagina della soluzione.

Nel caso di risposta scritta, la risposta esatta appare in un riquadro in fondo all'esercizio.



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

## Quiz n. 1

Per iniziare il quiz cliccare “Inizio Test”, quando si è finito, per ottenere la valutazione, cliccare su “Fine Test”.

Rispondere a tutte le domande del quiz. È sempre possibile (prima di cliccare su “Fine Test”) modificare le proprie risposte.

1. Dati i vettori:

$$\mathbf{a} = [-3, 2, 5] \quad \mathbf{b} = [4, -1, 3]$$

il vettore somma  $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$  è:

$$[-1, 1, 8]$$

$$[1, -1, 8]$$

$$[1, 1, 8]$$

$$[1, 1, -8]$$

2. Dati i vettori:

$$\mathbf{a} = [3, 5, 1] \quad \mathbf{b} = [-4, -1, 2]$$

il prodotto scalare  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  è:

$$15$$

$$-10$$

$$10$$

$$-15$$

3.  $[2, -3, 1] \cdot [-3, \frac{1}{3}, 2] = ?$

$$-5$$

$$3$$

$$5$$

$$-3$$



Indietro

Pieno Schermo

Chiudere

Uscire

## Quiz n. 2

Per iniziare il quiz cliccare “Inizio Test”, quando si è finito, per ottenere la valutazione, cliccare su “Fine Test”.

Rispondere a tutte le domande del quiz. È sempre possibile (prima di cliccare su “Fine Test”) modificare le proprie risposte.

Date le 2 matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

1. esiste  $A + B$ ?

Vero

Falso

2. esiste  $A^2$ ?

Vero

Falso

3. esiste  $A \cdot B$ ?

Vero

Falso

4. esiste  $B \cdot A$ ?

Vero

Falso



Indietro

Pieno Schermo

Chiudere

Uscire

## Quiz n. 3

Per iniziare il quiz cliccare “Inizio Test”, quando si è finito, per ottenere la valutazione, cliccare su “Fine Test”.

Rispondere a tutte le domande del quiz. È sempre possibile (prima di cliccare su “Fine Test”) modificare le proprie risposte.

Calcolare il determinante delle matrici:

1.  $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$\det A = 19$

$\det A = 23$

$\det A = -19$

$\det A = -23$

2.  $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

$\det B = 28$

$\det B = -28$

$\det B = 14$

$\det B = -14$

3.  $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$\det C = -15$

$\det B = 20$

$\det C = -20$

$\det B = 15$

4.  $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

$\det D = 128$

$\det D = 0$

$\det B = -128$

$\det B = 64$



Indietro

Pieno Schermo

Chiudere

Uscire

## Quiz n. 4

Per iniziare il quiz cliccare “Inizio Test”, quando si è finito, per ottenere la valutazione, cliccare su “Fine Test”.

Rispondere a tutte le domande del quiz. È sempre possibile (prima di cliccare su “Fine Test”) modificare le proprie risposte.

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2k+1 \end{bmatrix}, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

1.  $A$  è invertibile se  $k \neq 0$ ?

Vero

Falso

2.  $A$  è invertibile se  $k \neq -\frac{1}{2}$ ?

Vero

Falso

3.  $A$  è invertibile se :

$$k \neq 0 \text{ e } k \neq -\frac{3}{4}$$

$$k \neq 0 \text{ e } k \neq -\frac{1}{2}$$

$$k \neq -\frac{1}{2}$$

$$k \neq -\frac{3}{4}$$

4. L'elemento di posto (2,2) di  $A^{-1}$  vale :

$$2 + 3k$$

$$0$$

$$2 - 3k$$

$$3 - 2k$$



Indietro

Pieno Schermo

Chiudere

Uscire

## Quiz n. 5

Per iniziare il quiz cliccare “Inizio Test”, quando si è finito, per ottenere la valutazione, cliccare su “Fine Test”.

Rispondere a tutte le domande del quiz. È sempre possibile (prima di cliccare su “Fine Test”) modificare le proprie risposte.

Calcolare il rango delle matrici:

1.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$r(A) = 3$$

$$r(A) = 2$$

$$r(A) = -2$$

$$r(A) = -3$$

2.  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$r(B) = 3$$

$$r(B) = 2$$

$$r(B) = -3$$

$$r(B) = -2$$

3.  $C = \begin{bmatrix} k+1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2k & 4 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$

$$r(C) = 2 \quad \Rightarrow k \neq -\frac{17}{7}$$

$$r(C) = 2 \quad \Rightarrow k \neq -\frac{17}{7}$$

$$r(C) = 3 \quad \Rightarrow k \neq \frac{17}{7}$$

$$r(C) = 3 \quad \Rightarrow k \neq -\frac{17}{7}$$



Indietro

Pieno Schermo

Chiudere

Uscire



## Quiz n. 6

Per iniziare il quiz cliccare “Inizio Test”, quando si è finito, per ottenere la valutazione, cliccare su “Fine Test”.

Rispondere a tutte le domande del quiz. È sempre possibile (prima di cliccare su “Fine Test”) modificare le proprie risposte.

Risolvere i sistemi lineari:

1. 
$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = -2 \\ 2x - 3y - z = 1 \end{cases}$$

$$x = 2, y = 0, z = 1$$

Indeterminato

2. 
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ -x + 2y - 3z = 1 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

$$x = 3, y = -7, z = -6$$

Indeterminato

3. 
$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \\ y - 7z = 0 \end{cases}$$

$$x = 1, y = 0, z = 0$$

Indeterminato

$$x = 1, y = 2, z = 0$$

Impossibile

$$x = -3, y = 7, z = 6$$

Impossibile

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

Impossibile



Indietro

Pieno Schermo

Chiudere

Uscire

## Quiz n. 7

Per iniziare il quiz cliccare “Inizio Test”, quando si è finito, per ottenere la valutazione, cliccare su “Fine Test”.

Rispondere a tutte le domande del quiz. È sempre possibile (prima di cliccare su “Fine Test”) modificare le proprie risposte.

Dato il sistema lineare parametrizzato:

$$\begin{cases} x + (k + 1)y + z = 0 \\ -2x + y + kz = 0 \\ (k + 2)x - y = k + 1 \end{cases}$$

1. Per  $k = 0$ , il sistema risulta:

Determinato

Impossibile

Indeterminato

2. Il sistema ha soluzione per:

$$k = -1 \text{ e } k = 0$$

$$k \neq -1 \text{ e } k \neq 0$$

$$k \neq -2 \text{ e } k \neq -1 \text{ e } k \neq 0$$

$$k = -2 \text{ e } k = -1 \text{ e } k = 0$$

3. Per  $k = 1$  la soluzione è:

$$x = \frac{1}{3}, y = -1, z = \frac{4}{3}$$

$$x = -\frac{1}{3}, y = -1, z = \frac{5}{3}$$

$$x = -\frac{1}{3}, y = -1, z = \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}, y = -1, z = \frac{5}{3}$$



Indietro

Pieno Schermo

Chiudere

Uscire

## Soluzioni dei Quiz

**Soluzione della domanda 1 del quiz n. 1:**

$$s = [-3 + 4, 2 - 1, 5 + 3] = [1, 1, 8]$$

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

**Soluzione della domanda 2 del quiz n. 1:**

$$[3, 5, 1] \cdot [-4, -1, 2] = 3 \cdot (-4) + 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = -12 - 5 + 2 = -15$$

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

**Soluzione della domanda 3 del quiz n. 1:**

$$[2, -3, 1] \cdot \left[-3, \frac{1}{3}, 2\right] = 2 \cdot (-3) - 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 2 = -6 - 1 + 2 = 5$$

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

**Soluzione della domanda 1 del quiz n. 2:**

$$A \in \mathcal{M}_{2,3} \neq B \in \mathcal{M}_{3,2}$$

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

**Soluzione della domanda 2 del quiz n. 2:**

$$A^2 = A \cdot A$$

Il numero di colonne della prima matrice (3) è diverso dal numero di righe della seconda (2).

**Fine Quiz**



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

### Soluzione della domanda 3 del quiz n. 2:

Il numero di colonne della matrice  $A$  è uguale dal numero di righe della matrice  $B$ , 3.

La matrice prodotto sarà una matrice quadrata di ordine 2:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -6 & 21 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*



### Soluzione della domanda 4 del quiz n. 2:

Il numero di colonne della matrice  $A$  è uguale dal numero di righe della matrice  $B$ , 2.

La matrice prodotto sarà una matrice quadrata di ordine 3:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 2 & -3 & -3 \\ 7 & -1 & 18 \end{bmatrix}$$

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

**Soluzione della domanda 1 del quiz n. 3:**

$$\det A = 7 \cdot 3 - (-2 \cdot (-1)) = 21 - 2 = 19 .$$

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

**Soluzione della domanda 2 del quiz n. 3:**

Applichiamo la regola di Laplace prendendo, ad esempio, la riga 3:

$$\det B = -7 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-1 - (-5)) = -7 \cdot 4 = -28.$$

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

### Soluzione della domanda 3 del quiz n. 3:

Applichiamo Laplace:

$$\det C = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-6) - 2 = -20.$$

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

**Soluzione della domanda 4 del quiz n. 3:**

Poiché la matrice presenta due righe uguali (la prima e la terza), il determinante risulta 0 .

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

**Soluzione della domanda 1 del quiz n. 4:**

$$\det A = k \cdot \left(k + \frac{3}{4}\right) \Rightarrow A \text{ invertibile} \Leftrightarrow k \neq 0 \text{ e } k \neq -\frac{3}{4}.$$

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

**Soluzione della domanda 2 del quiz n. 4:**

$$\det A = k \cdot \left(k + \frac{3}{4}\right) \Rightarrow A \text{ invertibile} \Leftrightarrow k \neq 0 \text{ e } k \neq -\frac{3}{4}.$$

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

**Soluzione della domanda 3 del quiz n. 4:**

$$\det A = k \cdot \left(k + \frac{3}{4}\right) \Rightarrow A \text{ invertibile} \Leftrightarrow k \neq 0 \text{ e } k \neq -\frac{3}{4}.$$

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*



**Soluzione della domanda 4 del quiz n. 4:**

L'elemento di posto (2,2) della matrice  $A$  vale 0, quindi anche l'elemento corrispondente della matrice inversa  $A^{-1}$  vale 0.

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

**Soluzione della domanda 1 del quiz n. 5:**

Poiché  $A$  presenta 2 righe uguali allora  $\det A = 0 \Rightarrow r(A) < 3$ .

Inoltre, poiché esiste un minore di ordine 2 diverso da 0  $\left( \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \right) \Rightarrow r(A) = 2$ .

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

**Soluzione della domanda 2 del quiz n. 5:**

Abbiamo  $1 \leq r(B) \leq 3$  .

Poiché esiste un minore di ordine 3 diverso da 0  $\left( \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{array} \right| = 3 \neq 0 \right)$  allora  $r(A) = 3$  .

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

Soluzione della domanda 3 del quiz n. 5:

$$\det C = 14k - 34 \Rightarrow r(C) = 3 \Leftrightarrow \det C \neq 0 \Rightarrow k \neq \frac{17}{7}.$$

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

**Soluzione della domanda 1 del quiz n. 6:**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$r(A) = r(A|\mathbf{b}) = 2 \Rightarrow$  il sistema ha  $\infty^{3-2}$  soluzioni, risulta perciò indeterminato .

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

**Soluzione della domanda 2 del quiz n. 6:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$r(A) = r(A|\mathbf{b}) = 3 \Rightarrow$  il sistema risulta determinato, con l'unica soluzione :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

**Soluzione della domanda 3 del quiz n. 6:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Il sistema è un sistema omogeneo, per cui avrà sempre soluzione.

$r(A) = r(A|\mathbf{b}) = 3 \Rightarrow$  il sistema risulta determinato con l'unica soluzione :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

Soluzione della domanda 1 del quiz n. 7:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ -2 & 1 & k \\ k+2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k+1 \end{bmatrix}.$$

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow k \neq -2 \text{ e } k \neq -1 \text{ e } k \neq 0$$

Quindi, per  $k = 0$ ,  $r(A) = 2 < r(A|\mathbf{b}) = 3 \Rightarrow$  il sistema è impossibile.

Fine Quiz



Indietro

Pieno Schermo

Chiudere

Uscire



**Soluzione della domanda 2 del quiz n. 7:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ -2 & 1 & k \\ k+2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k+1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema ha soluzione se e solo se  $r(A) = r(A|\mathbf{b})$ , cioè se e solo se:

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow k \neq -2 \text{ e } k \neq -1 \text{ e } k \neq 0$$

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*

### Soluzione della domanda 3 del quiz n. 7:

Per  $k = 1$ , il sistema diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

La soluzione è:

$$x = \frac{1}{3}, y = -1, z = \frac{5}{3}.$$

Fine Quiz



*Indietro*

*Pieno Schermo*

*Chiudere*

*Uscire*