Esercizi interattivi di Matematica Generale. Limiti

Francesco Brega – Grazia Messineo

Istruzioni

Per iniziare i quiz cliccare "Inizio Test", quando si è finito, per ottenere la valutazione, cliccare su "Fine Test".

Dove viene richiesta una risposta scritta usare le seguenti regole:

- Usare `*` per indicare la moltiplicazione: scrivere 4*x per $4x$;
- Usare `^` per indicare le potenze: scrivere `4*x^3` per $4x^3$; `12*x^-6` per $12x^{-6}$;
- Usare parentesi per delimitare l'argomento di una funzione; cioè scrivere `cos(x)` e non `cos x`;
- Usare parentesi per indicare il *risultato* di un'operazione: scrivere `4*x*(x^2+1)^3` per $4x(x^2+1)^3$; `4^(2*x+1)` per 4^{2x+1}; `(cos(x))^2` per $(\cos(x))^2$. *Non* scrivere `cos^2(x)` per $\cos^2(x)$, scrivere `(cos(x))^2`!
- Si possono usare parentesi quadre `[ ]` o graffe `{ }`, per delimitare un'espressione matematica.
- Funzioni che possono essere usate:
  - Trigonometriche: `sin` (seno), `cos` (coseno), `tan` (tangente), `cot` (cotangente), `sec` (secante), `csc` (cosecante);
  - Trigonometriche Inverse: `asin` (arcoseno), `acos` (arcocoseno), `atan` (arcotangente);
  - Logaritmiche: `ln` (logaritmo naturale), o `log`;
  - Esponenziale: la funzione esponenziale e^x, può essere immessa come `exp(x)` o come `e^x`.
  - Il valore assoluto, `abs`$(\cdot)$ può anche essere scritto nel modo solito `|`$\cdot$`|`; cioè si può scrivere `abs(x)` o `|x|`.
  - Altre: `sqrt`, si scrive `sqrt(x)` per $\sqrt{x}$ (o si usa la notazione esponenziale: `x^(1/2)`).

Quando la risposta viene immessa il programma fa un qualche controllo per determinare se è un'espressione matematica corretta: per esempio, se si scrive `san(x)`, la funzione '`san`' non sarà riconosciuta come un'espressione valida e ci sarà un messaggio di errore e la risposta non è considerata errata. C'è anche un controllo sulle parentesi: `((x^4+1) + sin(x)^2` sarà indicato come errore di sintassi.

Importante: Nella risposta bisogna sempre usare la variabile indipendente data nel testo dell'esercizio: se il testo usa x, si usa `x`; se l'enunciato del problema usa t, si usa `t` nella risposta. Immettere una funzione di t quando il programma si aspetta una funzione di x, avrà certamente come risultato "risposta sbagliata".

Importante: Dopo aver dato la risposta premere il tasto invio o cliccare col mouse su un'area vuota della pagina.

Simboli: Nelle correzioni il simbolo ✔ indica che lo studente ha dato la risposta corretta; un ✘, indica una risposta errata, in questo caso, la risposta corretta è indicata con ●.

Se il quiz ha una soluzione, la casella della risposta esatta ha un riquadro verde: cliccando e premendo Shift sulla casella si va alla pagina della soluzione.

Nel caso di risposta scritta, la risposta esatta appare in un riquadro in fondo all'esercizio.

Quiz n. 1

Per iniziare il quiz cliccare "Inizio Test", quando si è finito, per ottenere la valutazione, cliccare su "Fine Test".

Rispondere a tutte le domande del quiz. È sempre possibile (prima di cliccare su "Fine Test") modificare le proprie risposte.

Inizio Quiz

1. Il limite

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\ln(x-1) + \sqrt[3]{x-2}}{\operatorname{sen}(x-2)}$$

vale

☐ 0 ☐ 1 ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$

2. Il limite

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)^{\frac{1}{(1-cos x)}}$$

vale

☐ $e^{-2/3}$ ☐ $e^{2/3}$ ☐ $e^{-1/3}$ ☐ $e^{1/3}$

3. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+7}{x+4}\right)^{2x}$$

vale

☐ e^4 ☐ e^6 ☐ 1 ☐ 0

4. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} (x-1)^3 \ln\left(1 + \frac{1}{5(x-1)}\right) - (x-1)^2$$

vale

☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 1 ☐ 0

5. Il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{x+4}}{(\mathrm{e}^x - 1)^4}$$

vale

- ☐ $+\infty$
- ☐ $-\infty$
- ☐ 1
- ☐ 0

6. Il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3x+2}} - 1}{\operatorname{sen}\left(\frac{x^3}{3x+2}\right)} \cdot \ln\left(1 + \operatorname{sen}\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{3\sqrt{x}}$$

vale

- ☐ $+\infty$
- ☐ $-\infty$
- ☐ 3
- ☐ $\frac{1}{3}$

Fine Quiz | Punteggio: | Correggere

Quiz n. 2

Per iniziare il quiz cliccare "Inizio Test", quando si è finito, per ottenere la valutazione, cliccare su "Fine Test".

Rispondere a tutte le domande del quiz. È sempre possibile (prima di cliccare su "Fine Test") modificare le proprie risposte.

Inizio Quiz

1. Il limite

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + k \operatorname{sen} x)^{1/x}\,;\ k \in \mathbb{R}$$

vale $\sqrt{e}$ per

☐ $k = 0$ ☐ $k = 1$ ☐ $k = \frac{1}{4}$ ☐ $k = \frac{1}{2}$

2. Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + \operatorname{tg}^2 x}{kx^2};\ k \in \mathbb{R}; k \neq 0$$

vale 5 per

☐ nessun valore di k ☐ $k = \frac{1}{5}$ ☐ $k = 5$ ☐ $k = 1$

3. Il limite

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x + 1 + k^2}{x + 1}\right)^{kx+3}$$

vale e^8 per

☐ $k = 0$ ☐ $k = -2$ ☐ $k = 2$ ☐ $k = 1$

Fine Quiz | Punteggio: | Correggere

Quiz n. 3

Per iniziare il quiz cliccare "Inizio Test", quando si è finito, per ottenere la valutazione, cliccare su "Fine Test".

Rispondere a tutte le domande del quiz. È sempre possibile (prima di cliccare su "Fine Test") modificare le proprie risposte.

Inizio Quiz

1. Il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1 - e^x}}{e^x}$$

ammette i seguenti asintoti

- ☐ $y = 0$ e $x = 0$
- ☐ $y = 0$
- ☐ $x = 0$
- ☐ $y = 0$ e $y = x - 1$

2. Il grafico della funzione

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} + e^x\right)$$

ammette i seguenti asintoti

- ☐ $y = x$ per $x \to -\infty$ e $y = 2x$ per $x \to +\infty$
- ☐ $y = x$
- ☐ $y = 2x$
- ☐ $y = 0$

3. Il grafico della funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right) - 5x$$

ammette i seguenti asintoti

- ☐ $y = -5x$ e $x = -1$
- ☐ $x = 2$ e $x = -1$
- ☐ $y = -5x$, $x = -1$ e $x = 2$
- ☐ $y = -5$, $x = -1$ e $x = 2$

Fine Quiz

Punteggio: Correggere

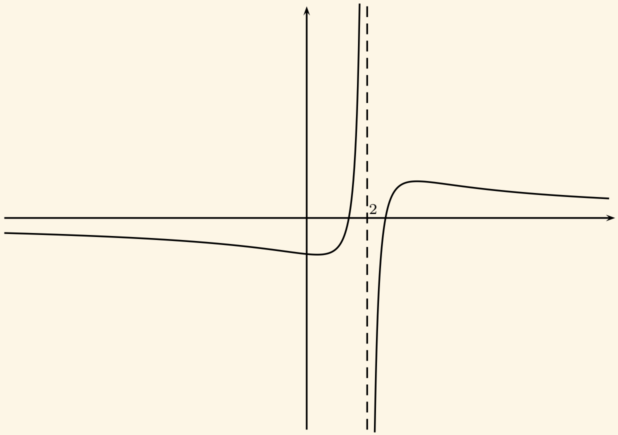
Quiz n. 4

Per iniziare il quiz cliccare "Inizio Test", quando si è finito, per ottenere la valutazione, cliccare su "Fine Test".

Rispondere a tutte le domande del quiz. È sempre possibile (prima di cliccare su "Fine Test") modificare le proprie risposte.

Inizio Quiz

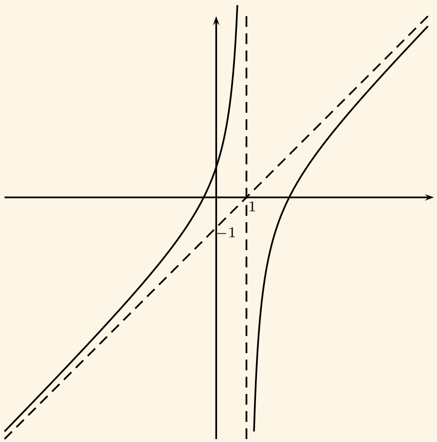
1. Sia f la funzione il cui grafico è rappresentato in figura



allora

- ☐ la retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale; non vi sono asintoti verticali
- ☐ la retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale e la retta di equazione $x = 2$ è asintoto verticale
- ☐ la retta di equazione $x = 2$ è asintoto verticale; non vi sono asintoti orizzontali
- ☐ la funzione non presenta asintoti

2. Sia f la funzione il cui grafico è rappresentato in figura



allora

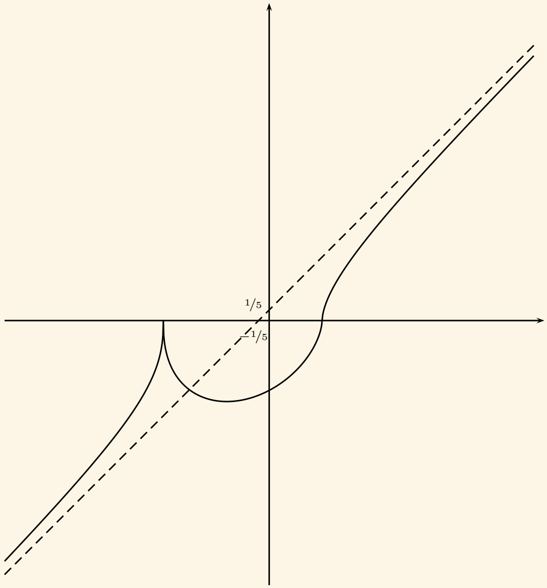
☐ la retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale

☐ la retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale; non vi sono asintoti obliqui

☐ la retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale e la retta di equazione $y = x - 1$ è asintoto obliquo

☐ la retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale e la retta di equazione $y = x$ è asintoto obliquo

3. Sia f la funzione il cui grafico è rappresentato in figura



allora

- [ ] la retta di equazione $y = x - 1$ è asintoto obliquo; non vi sono altri asintoti
- [ ] la retta di equazione $y = x + 1$ è asintoto obliquo; non vi sono altri asintoti
- [ ] la retta di equazione $y = x - \frac{1}{5}$ è asintoto obliquo; non vi sono altri asintoti
- [ ] la retta di equazione $y = x + \frac{1}{5}$ è asintoto obliquo; non vi sono altri asintoti

Fine Quiz

Punteggio: Correggere

Indietro
Pieno Schermo
Chiudere
Uscire

Soluzioni dei Quiz

Soluzione della domanda 1 del quiz n. 1:
Il limite si presenta nella forma di indecisione $\frac{0}{0}$.
Poniamo
$$x - 2 = t \Rightarrow t \to 0^- \text{ per } x \to 2^-$$
Il limite proposto diventa
$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\ln(1+t) + \sqrt[3]{t}}{\operatorname{sen} t}$$
Poiché
$$\ln(1+t) \sim t \text{ e } \operatorname{sen} t \sim t \text{ per } t \to 0$$
si ha
$$\lim_{t\to 0^-} \frac{t + \sqrt[3]{t}}{t} = \lim_{t\to 0^-} 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} = +\infty$$

Fine Quiz

Soluzione della domanda 2 del quiz n. 1:

Il limite si presenta nella forma di indecisione 1^∞.

Si ha

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{3}x^2\right)^{1/(1\,-\,cos^2 x)} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{(1-cos^2 x)}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{3}x^2\right)}$$

Poiché

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2;\ \ln\left(1+\frac{1}{3}x^2\right) \sim \frac{1}{3}x^2 \text{ per } x \to 0$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{2}{x^2}\cdot\frac{1}{3}x^2} = \mathrm{e}^{2/3}$$

Fine Quiz

Soluzione della domanda 3 del quiz n. 1:
Il limite si presenta nella forma di indecisione 1^∞.

Si ha

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+7}{x+4}\right)^{2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\left(1+\frac{7}{x}\right)}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}\right)^{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x\ln\left(1+\frac{7}{x}\right)}}{\mathrm{e}^{2x\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)}}$$

Poiché

$$\left(1+\frac{7}{x}\right)\sim\frac{7}{x}\ \text{e}\ \left(1+\frac{4}{x}\right)\sim\frac{4}{x}\ \text{per}\ x\to+\infty$$

si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x\ln\left(1+\frac{7}{x}\right)}}{\mathrm{e}^{2x\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)}} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{14}}{\mathrm{e}^{8}} = \mathrm{e}^{6}$$

Fine Quiz

Soluzione della domanda 4 del quiz n. 1:

Il limite si presenta nella forma di indecisione $0 \cdot \infty$.

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)^3 \ln\left(1+\frac{1}{5(x-1)}\right) - (x-1)^2 = (x-1)^2\left[(x-1)\ln\left(1+\frac{1}{5(x-1)}\right)-1\right]$$

Poiché

$$\ln\left(1+\frac{1}{5(x-1)}\right) \sim \frac{1}{5(x-1)} \text{ per } x \to +\infty$$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)^2\left[(x-1)\cdot\frac{1}{5(x-1)}-1\right] = \lim_{x\to+\infty}(x-1)^2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\infty$$

Fine Quiz

Soluzione della domanda 5 del quiz n. 1:

Il limite si presenta nella forma di indecisione $\frac{0}{0}$.

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{x+4}}{(\mathrm{e}^x-1)^4} = \lim_{x\to 0^+} x^x \cdot \frac{x^4}{(\mathrm{e}^x-1)^4} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln x} = \mathrm{e}^0 = 1$$

Fine Quiz

Soluzione della domanda 6 del quiz n. 1:

Il limite si presenta nella forma di indecisione $\frac{0}{0}$.

Poiché

$$\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3x+2}} - 1 \sim \frac{x^3}{3x+2};\ \operatorname{sen}\left(\frac{x^3}{3x+2}\right) \sim \frac{x^3}{3x+2};\ \ln\left(1+\operatorname{sen}\sqrt{x}\right) \sim \sqrt{x} \text{ per } x \to 0^+$$

il limite proposto diventa

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^3}{3x+2}}{\frac{x^3}{3x+2}} \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$$

Fine Quiz

Soluzione della domanda 1 del quiz n. 2:

Il limite si presenta nella forma di indecisione 1^∞.

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + k \operatorname{sen} x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x} \ln(1+k \operatorname{sen} x)}$$

Poiché

$$\ln(1 + k \operatorname{sen} x) \sim k \operatorname{sen} x \text{ e } k \operatorname{sen} x \sim kx \text{ per } x \to 0$$

il limite diventa

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot kx} = \mathrm{e}^k$$

Quindi

$$\mathrm{e}^k = \mathrm{e}^{1/2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Fine Quiz

Indietro

Pieno Schermo

Chiudere

Uscire

Soluzione della domanda 2 del quiz n. 2:

Il limite si presenta nella forma di indecisione $\frac{0}{0}$.

Poiché

$$\operatorname{tg} x \sim x \text{ per } x \to 0$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + \operatorname{tg}^2 x}{kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x^2}{kx^2} = \frac{1}{k}$$

Deve quindi essere

$$\frac{1}{k} = 5 \Rightarrow k = \frac{1}{5}$$

Fine Quiz

Soluzione della domanda 3 del quiz n. 2:
Il limite si presenta nella forma di indecisione 1^∞.

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1+k^2}{x+1}\right)^{kx+3}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k^2}{x+1}\right)^{kx+3}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{(kx+3)\ln\left(1+\frac{k^2}{x+1}\right)}$$

Poiché

$$\ln\left(1+\frac{k^2}{x+1}\right)\sim\frac{k^2}{x+1}\ \text{per}\ x\to+\infty$$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{(kx+3)\ln\left(1+\frac{k^2}{x+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{k^2(kx+3)}{x+1}}=\mathrm{e}^{k^3}$$

Deve quindi essere

$$\mathrm{e}^{k^3}=\mathrm{e}^8\Rightarrow k^3=8\Rightarrow k=2$$

Fine Quiz

Soluzione della domanda 1 del quiz n. 3:

La funzione è definita in $(-\infty, +\infty)$.

Poiché si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

la retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale per il grafico di f per $x \to +\infty$.

Si ha inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

quindi potrebbe esistere asintoto obliquo.

Poiché però

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

l'asintoto obliquo non esiste. Fine Quiz

Soluzione della domanda 2 del quiz n. 3:

La funzione è definita in $(-\infty, +\infty)$.

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

quindi potrebbe esistere asintoto obliquo.

Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2; \ \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0$$

la retta di equazione $y = 2x$ è asintoto obliquo per il grafico di f per $x \to +\infty$.

Si ha inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

quindi potrebbe esistere asintoto obliquo.

Poiché

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1; \ \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$$

la retta di equazione $y = x$ è asintoto obliquo per il grafico di f per $x \to -\infty$. Fine Quiz

Soluzione della domanda 3 del quiz n. 3:

La funzione è definita in $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

Si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$$

quindi potrebbe esistere asintoto obliquo.

Poiché

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -5; \ \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - 5x = 0$$

la retta di equazione $y = -5x$ è asintoto obliquo per il grafico di f per $x \to \pm\infty$.

Inoltre, si ha

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty; \ \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

quindi le rette di equazione $x = -1$ e $x = 2$ sono asintoti verticali per il grafico di f. Fine Quiz

Soluzione della domanda 1 del quiz n. 4:
Dal grafico, si deduce che la funzione è definita in $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Poiché $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to 2$ e $f(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$, la retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale e la retta di equazione $x = 2$ è asintoto verticale per il grafico di f. Fine Quiz

Soluzione della domanda 2 del quiz n. 4:
Dal grafico, si deduce che la funzione è definita in $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Poiché $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to 1$, la retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale per il grafico di f.

Inoltre, il grafico di f presenta un asintoto obliquo, che è una retta passante per i punti $(0, -1)$ e $(1, 0)$. Tale retta ha equazione $y = x - 1$. Fine Quiz

Soluzione della domanda 3 del quiz n. 4:
Dal grafico, si deduce che la funzione è definita in $(-\infty, +\infty)$.

Il grafico di f presenta un asintoto obliquo, che è una retta passante per i punti $\left(0, -\frac{1}{5}\right)$ e $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$. Tale retta ha equazione $y = x + \frac{1}{5}$.

Fine Quiz

Indietro

Pieno Schermo

Chiudere

Uscire