MATEMATICA DI BASE

Pasquale L. De Angelis

Esercizi relativi al capitolo I

Nel seguito sono riportati alcuni esercizi utili a verificare la qualità della conoscenza acquisita sugli argomenti sviluppati nel capitolo I del volume.

Si consiglia caldamente di affrontarli solo dopo aver studiato l'intero capitolo, aver compreso gli esempi ivi riportati e risolto gli esercizi di controllo suggeriti.

1. Dire se l'espressione $1/2$ rappresenta un simbolo o un valore e, se un simbolo dire, se è possibile, qual è il suo valore.

2. Dire se l'espressione $0.\overline{5}$ rappresenta un simbolo o un valore e, se un simbolo dire, se è possibile, qual è il suo valore.

3. Dire se $0.3\overline{3}$ rappresenta un numero razionale.

4. Dire se $3.25 \in \mathbb{R}$, $3.24 \in \mathbb{Q}$, $-3 \in Z$, $-5 \in \mathbb{Q}$.

5. Dire se l'espressione $\sqrt{2}$ rappresenta un simbolo o un valore e, se un simbolo dire, se è possibile, qual è il suo valore.

6. Dire se il prodotto $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$ si può scrivere con un simbolo più compatto.

7. Dire se l'espressione $2\sqrt{2} - \sqrt{2}$ si può scrivere con un simbolo più compatto.

8. Dire se l'espressione $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ si può scrivere con un simbolo più compatto.

9. Considerati gli insiemi $\mathbf{A} = \{1, 2\}$ e $\mathbf{B} = \{2\}$, dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

   a) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = 2$; *b*) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{2\}$;
   c) $2 \in \mathbf{B}$; *d*) $2 \subset \mathbf{B}$.

10. Sia $\mathbf{S} = \{1, 2, ..., 10\}$. Considerati gli insiemi:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{S} : x \ pari\},$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{S} : x \ dispari, x \geq 3\},$$

   determinare:

   a) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$; *b*)$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$; *c*)$\mathbf{A} - \mathbf{B}$; *d*)$\mathbf{B} - \mathbf{A}$.

11. Considerati gli insiemi:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < \sqrt{2}\},$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{Q} : -1 < x < 1.3\},$$

   determinare:

   a) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$; *b*)$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$; *c*)$\mathbf{A} - \mathbf{B}$; *d*)$\mathbf{B} - \mathbf{A}$.

12. Considerati gli insiemi:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{3}{4} < x < \sqrt{5}\},$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{Q} : -\frac{3}{4} < x < 2\},$$

   dire se $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ oppure $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ e determinare:

   a) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$; *b*)$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$; *c*)$\mathbf{A} - \mathbf{B}$; *d*)$\mathbf{B} - \mathbf{A}$.

13. Considerati gli insiemi:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < \sqrt{2}\},$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq \sqrt{2}\},$$

dire se $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ oppure $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ e determinare:

a) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$; $b)\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$; $c)\mathbf{A} - \mathbf{B}$; $d)\mathbf{B} - \mathbf{A}$.

14. Considerati gli insiemi:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 4\},$$

$$\mathbf{B} = \{x \in Z : 1 < x < \sqrt{5}\},$$

dire se $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ oppure $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ e determinare:

a) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$; $b)\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$; $c)\mathbf{A} - \mathbf{B}$; $d)\mathbf{B} - \mathbf{A}$.

15. Considerati gli insiemi:

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \sqrt{2}\},$$

$$\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \sqrt{2}\},$$

determinare:
a) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$; $b)\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$; $c)\mathbf{A} - \mathbf{B}$; $d)\mathbf{B} - \mathbf{A}$.

16. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

a) Un insieme dotato di minimo ammette sempre estremo inferiore.

b) Un insieme dotato di estremo superiore ammette sempre massimo.

c) Un insieme limitato inferiormente ammette sempre estremo inferiore.

d) Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato superiormente è dotato di estremo superiore.

e) Ogni sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ limitato superiormente ammette sempre estremo superiore.

17. Dire se l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è limitato inferiormente.

18. Controllare se l'insieme
$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Q} : -\frac{1}{2} < x < \sqrt{3}\} \subset \mathbb{Q}$$
è limitato e valutare estremo inferiore e superiore.

19. Controllare se l'insieme:
$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{1}{n^2}\ , n \in \mathbb{N}\}$$
è limitato e valutare estremo inferiore e superiore.

20. Considerato l'insieme
$$\mathbf{A} = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$
determinare:
a) $\inf \mathbf{A}$, b) $\sup \mathbf{A}$

21. Controllare se l'insieme
$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -\pi\} \subset \mathbb{R}$$
è limitato.

22. Determinare, se esiste, l'estremo superiore e inferiore dell'insieme:
$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq \pi\}$$

23. Controllare se l'insieme:
$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Q} : -5 < x < \sqrt{3}\} \subset \mathbb{Q}$$
è limitato e determinare, se esistono:
a) $\sup \mathbf{A}$, b) $\inf \mathbf{A}$, c) $\max \mathbf{A}$, d) $\min \mathbf{A}$

24. Controllare se l'insieme

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Q} \, : x = \frac{n}{n+1}, \; n \in \mathbb{N}\}$$

è limitato e determinare, se esistono:

a) $\inf \mathbf{A}$, b) $\sup \mathbf{A}$.

25. Controllare se l'insieme

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Q} \, : x = \frac{n-1}{n+1}, \; n \in \mathbb{N}\}$$

è limitato e determinare, se esistono:

a) $\inf \mathbf{A}$, b) $\sup \mathbf{A}$

26. Nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ consideriamo il sottoinsieme $\mathbf{A}$ formato da tutti i numeri che nel sistema decimale si scrivono con due cifre.

Controllare se $\mathbf{A}$ è limitato e determinare, se esistono:

a) $\inf \mathbf{A}$, b) $\sup \mathbf{A}$.

27. Controllare se l'insieme

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Q} \, : x = 3 - \frac{1}{n}, \; n \in \mathbb{N}\}$$

è limitato e determinare, se esistono:

a) $\inf \mathbf{A}$, b) $\sup \mathbf{A}$.

28. Controllare se l'insieme

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} \, : x = \frac{2n+3}{5n}, \; n \in \mathbb{N}\}$$

è limitato e determinare, se esistono:

a) $\inf \mathbf{A}$, b) $\sup \mathbf{A}$.

29. Controllare se l'insieme

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} : x = n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$$

è limitato e determinare, se esistono:

a) $\inf \mathbf{A}$, b) $\sup \mathbf{A}$.

30. Controllare se l'insieme

$$\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} : x = 1 - n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$$

è limitato e determinare, se esistono:

a) $\inf \mathbf{A}$, b) $\sup \mathbf{A}$.

Risposte agli esercizi

1. L'espressione $\frac{1}{2}$ rappresenta un simbolo; il suo valore nel sistema decimale è 0.5 .

2. L'espressione $0.\overline{5}$ rappresenta un simbolo; il suo valore nel sistema decimale non è rappresentabile essendo espresso dopo il punto decimale da infinite cifre tutte uguali a 5; se ne può dare solo una approssimazione: ad esempio, $0.\overline{5} \simeq 0.55,\ 0.555,\ 0.5555555$, ecc.

3. L'espressione $0.3\overline{3}$ rappresenta un numero razionale.

4. Le appartenenze riportate sono tutte esatte; in particolare, il numero reale 3.25 è, in particolare, razionale. Il numero razionale -5 è, in particolare, intero relativo.

5. L'espressione $\sqrt{2}$ rappresenta un simbolo; il suo valore nel sistema decimale non è rappresentabile essendo espresso da infinite cifre non periodiche; se ne può dare solo una approssimazione: ad esempio, $\sqrt{2} \simeq 1.4,\ 1.42,\ 1.414$, ecc.

6. Il prodotto $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$ si può scrivere come $\sqrt{10}$.

7. Risulta: $2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

8. L'espressione $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ non si può scrivere con un simbolo più compatto.

9. **a)** Falsa.
   b) Vera.
   c) Vera.
   d) Falsa.

10. **a)** $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$;
    b) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

c) $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$;

d) $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \{3, 5, 7, 9\}$.

11. **a)** $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1.3\}$;

b) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{x \in \mathbb{Q} : -1 < x < \sqrt{2}\}$;

c) $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \{x \in \mathbb{Q} : 1.3 \leq x < \sqrt{2}\}$;

d) $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Q} : - \quad < x \leq 0\}$.

12. L'insieme **A** include **B** in quanto $\sqrt{5} \simeq 2.24$ è maggiore di 2; risulta:

a) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{B}$;

b) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{A}$;

c) $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : -\frac{3}{4} < x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < \sqrt{5}\}$;

d) $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \emptyset$.

13. Nessun insieme è incluso nell'altro; risulta:

a) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x \in \mathbb{Q} : 1 < x < \sqrt{2}\}$;

b) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \leq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < \sqrt{2}\}$;

c) $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \leq 1\}$;

d) $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : 1 < x < \sqrt{2}\}$.

14. L'insieme **A** include **B** in quanto $\sqrt{5} \simeq 2.24$ è minore di 4; risulta:

a) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{B} = \{2\}$;

b) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{A}$;

c) $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} - \{2\}$;

d) $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \emptyset$.

15. **a)** $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\sqrt{2}\}$;

b) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbb{R}$;

c) $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R} : x < \sqrt{2}\}$;

d) $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} : x > \sqrt{2}\}$.

16. **a)** Vera.
    b) Falsa.
    c) Falsa.
    d) Vera.
    e) Falsa.

17. L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è limitato inferiormente e si ha $\inf \mathbb{N} = 1$.

18. L'insieme $\mathbf{A}$ è limitato.

    Infatti si ha:

    $\mathbf{A}_{min} = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq -\frac{1}{2}\}$

    e dunque, esistendo minoranti di $\mathbf{A}$, l'insieme $\mathbf{A}$ è limitato inferiormente; siccome $\max \mathbf{A}_{min} = -\frac{1}{2}$, si ha che $\inf \mathbf{A} = -\frac{1}{2}$; si noti che $\nexists \min \mathbf{A}$.

    $\mathbf{A}_{magg} = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq \sqrt{3}\}$

    e dunque, esistendo maggioranti di $\mathbf{A}$, l'insieme $\mathbf{A}$ è limitato superiormente; siccome $\nexists \min \mathbf{A}_{magg}$, non esiste né estremo superiore né, tanto meno, massimo.

19. L'insieme $\mathbf{A}$ è limitato sia inferiormente che superiormente e si ha

    $\inf \mathbf{A} = \min \mathbf{A} = -1$;

    $\sup \mathbf{A} = 0, \quad \nexists \max \mathbf{A}$.

20. Si ha

    a) $\inf \mathbf{A} = 0; \quad \nexists \min \mathbf{A}$

    b) $\sup \mathbf{A} = \max \mathbf{A} = \frac{1}{2}$.

21. L'insieme $\mathbf{A}$ è limitato inferiormente ma non superiormente e si ha

    $\inf \mathbf{A} = \min \mathbf{A} = -\pi$;

    $\sup \mathbf{A} = +\infty$.

22. L'insieme $\mathbf{A}$ è limitato superiormente ma non inferiormente e si ha
    $\sup \mathbf{A} = \max \mathbf{A} = \pi$;
    $\inf \mathbf{A} = -\infty$.

23. L'insieme $\mathbf{A}$ è limitato e si ha:
    a) $\nexists \sup \mathbf{A}$;
    b) $\inf \mathbf{A} = -5$;
    c) $\nexists \max \mathbf{A}$;
    d) $\nexists \min \mathbf{A}$.

24. L'insieme $\mathbf{A}$ è limitato e si ha:
    a) $\inf \mathbf{A} = \min \mathbf{A} = \frac{1}{2}$;
    b) $\sup \mathbf{A} = 1, \quad \nexists \max \mathbf{A}$

25. L'insieme $\mathbf{A}$ è limitato e si ha:
    a) $\inf \mathbf{A} = \min \mathbf{A} = -1$;
    b) $\sup \mathbf{A} = 1, \quad \nexists \max \mathbf{A}$

26. L'insieme $\mathbf{A}$ è limitato e si ha:
    a) $\inf \mathbf{A} = \min \mathbf{A} = 10$;
    b) $\sup \mathbf{A} = \max \mathbf{A} = 99$

27. L'insieme $\mathbf{A}$ è limitato e si ha:
    a) $\inf \mathbf{A} = \min \mathbf{A} = 2$;
    b) $\sup \mathbf{A} = 3, \quad \nexists \max \mathbf{A}$

28. L'insieme $\mathbf{A}$ è limitato e si ha:
    a) $\inf \mathbf{A} = \frac{2}{5}$, $\nexists \min \mathbf{A}$;

b) $\sup \mathbf{A} = \max \mathbf{A} = 1.$

29. L'insieme **A** è limitato inferiormente ma non superiormente e si ha:

a) $\inf \mathbf{A} = \min \mathbf{A} = 2;$

b) $\sup \mathbf{A} = +\infty.$

30. L'insieme **A** è limitato superiormente ma non inferiormente e si ha:

a) $\inf \mathbf{A} = -\infty;$

b) $\sup \mathbf{A} = \max \mathbf{A} = 0.$