MATEMATICA DI BASE

Pasquale L. De Angelis

Prove d'esame

Nel seguito sono riportate le tracce e le soluzioni di alcune prove d'esame assegnate negli scorsi anni agli studenti dei corsi di area matematica del primo anno attivati presso i vari dipartimenti di natura economica dell'Ateneo.

Si consiglia caldamente di provare a risolverli solo dopo aver studiato l'intero volume, aver compreso gli esempi ivi riportati e risolto gli esercizi di controllo suggeriti.

Esame di
Metodi di Matematica Applicata (9 CFU)

1. Studiare il comportamento della funzione:
$$f(x) = \sqrt{x + 6\log(x+1)}$$

2. Risolvere mediante il metodo di Gauss il sistema lineare:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}$$

3. Considerato che la funzione $f(x) = \log x - x^3 + 2$ si annulla in $]1, 2[$, valutare un valore approssimato dello zero con un decimale esatto.

4. Determinare l'infinitesimo campione equivalente all'infinitesimo $f(x) = \operatorname{sen} 4x - \tan x^2$ in zero.

5. Calcolare le derivate parziali prime della seguente funzione:
$$f(x,y) = y^3 \log(x+2y) + x\sqrt{3+y^2}$$

6. Controllare se i vettori
$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \underline{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
sono linearmente indipendenti.

Svolgimento

- Esercizio n.1

- Campo di esistenza: $E[f(x)]$

  La funzione richiede la valutazione del $log(x+1)$; il suo argomento deve, allora, essere maggiore di zero: $x+1>0$ da cui, banalmente, si ha: $x>-1$.

  Successivamente occorre valutare $\sqrt{x+6\log(x+1)}$; il suo argomento deve, allora, essere maggiore o tutt'al più, uguale a zero: $x+6\log(x+1)\geq 0$. Quest'ultima disequazione non è facilmente risolvibile: proviamo, allora, a studiare, per sommi capi, la funzione $g(x)=x+6\log(x+1)$. Risulta:

  1. Campo di esistenza:
  $$E[g(x)]=E[x+6\log(x+1)]=]-1,+\infty).$$
  2. Comportamento agli estremi:
  $$\lim_{x\to-1} x+6\log(x+1)=-\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x+6\log(x+1)=+\infty.$$
  3. Monotonia:
  la funzione è somma di funzioni strettamente crescenti e, pertanto, è, anch'essa, strettamente crescente.

  In sintesi, la funzione $g(x)$ è una funzione:

  1. continua nell'intervallo $]-1,+\infty)$;
  2. il suo codominio coincide con $\mathbb{R}$;
  3. è strettamente crescente quindi biunivoca

  Deve quindi esistere un valore, indichiamolo con x_0, in cui la funzione vale zero; in più, nell'intervallo $]-1,x_0[$ la funzione sarà negativa, nell'intervallo $]x_0,+\infty)$ la funzione sarà positiva. Infine, è immediato riconoscere che risulta $x_0=0$.

  Per quanto rilevato sul comportamento della funzione $g(x)$, possiamo affermare che la funzione $f(x)$ è definita nell'intervallo $[0,+\infty)$ dove 0 è l'unico valore che rende nullo il termine $x+6\log(x+1)$:
  $$E[f(x)]=[x_0,+\infty);$$

- Comportamento agli estremi:
  La funzione è definita nel punto 0 e vale 0: $f(0) = 0$, mentre risulta:
  $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x + 6\log(x + 1)} = +\infty.$$

- Monotonia:
  la funzione è una funzione composta tra due funzioni strettamente crescenti (funzione radice e $g(x)$) e, pertanto, è , anch'essa, strettamente crescente.

  In sintesi, la funzione $f(x)$ è una funzione:

  1. continua nell'intervallo $[0, +\infty)$;
  2. il suo codominio coincide con l'intervallo $[0, +\infty)$;
  3. è strettamente crescente;
  4. è un infinito in $+\infty$ equivalente a $\sqrt{x}$, quindi, di ordine $1/2$: non può ammettere asintoti obliqui; inoltre, deve esistere un punto $x_1 \geq 0$ a partire dal quale essa risulta concava. La determinazione di tale punto richiederebbe l'analisi della derivata seconda della funzione che appare non agevole. Ipotizzando che tale punto coincida con 0 ovvero che la funzione sia sempre concava, possiamo ora tracciare un grafico approssimato di $f(x)$.

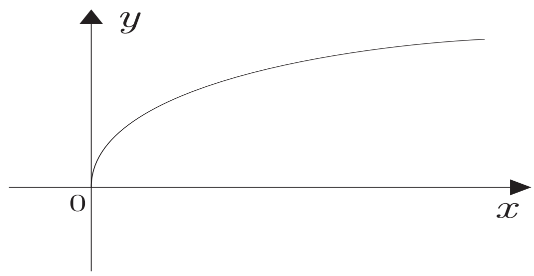

fig. 0.1

- Esercizio n.2

Scriviamo il sistema in forma matriciale e sottraiamo la prima riga moltiplicata per due dalla seconda e, moltiplicata per tre, dalla terza riga, ottenendo:

$$\mathrm{A}|b = \left(\begin{array}{rrrcr} 1 & -1 & -3 & | & 4 \\ 2 & -3 & 1 & | & 3 \\ 3 & -4 & -2 & | & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \mathrm{A}^{(1)}|b^{(1)} = \left(\begin{array}{rrrcr} 1 & -1 & -3 & | & 4 \\ 0 & -1 & 7 & | & -5 \\ 0 & -1 & 7 & | & -5 \end{array}\right)$$

La seconda e la terza riga della matrice completa sono uguali. Il sistema si riduce ad un sistema di due equazioni. Per comodità di lettura, riscriviamolo in forma scalare, cambiando i segni della seconda equazione:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & - & 7x_3 & = & 5 \end{array} \right.$$

Appare evidente che si possa assegnare a x_3 un valore arbitrario ($x_3 = t$) e portarlo a destra, ottenendo:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & - & x_2 & = & 4+3t \\ & & x_2 & = & 5+7t \end{array} \right.$$

Risulta, quindi, possibile ottenere x_2 dalla II equazione ($x_2 = 5 + 7t$) e x_1 dalla I equazione ($x_1 = 9 + 10t$). Il sistema è, quindi, dotato di infinite soluzioni:

$$\underline{x} = \left(\begin{array}{ccc} 9+10t & 5+7t & t \end{array} \right), \ \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

- Esercizio n.3

La funzione $f(x) = \log x - x^3 + 2$ si annulla certamente almeno una volta nell'intervallo $]1,2[$ in quanto sono pienamente soddisfatte le ipotesi del teorema degli zeri:

- la funzione $f(x)$, somma di funzioni continue, è continua nell'intervallo;
- $f(1) = 1$ e $f(2) = -5.3069$ ossia la funzione cambia segno agli estremi dell'intervallo.

Indicato con x_0 uno degli zeri della funzione $f(x)$, per trovarne un valore approssimato, applichiamo il metodo di bisezione; organizziamo i calcoli secondo la seguente tabella:

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$
0	1	1	2	-5.3069	1.5	-0.9695
1	1	1	1.5	-0.9695	1.25	0.2700
2	1.25	0.2700	1.5	-0.9695	1.375	-0.2812
3	1.25	0.2700	1.375	-0.2812	1.3125	0.0109
4	$\underline{1.3}125$	0.0109	$\underline{1.3}75$	-0.2812	1.3438	

Siccome la prima cifra decimale dei due estremi dell'intervallo ottenuto al 4 passo risulta la stessa, approssimiamo la soluzione con il punto medio di tale intervallo: $x_0 \simeq 1.3438$. [1]

- Esercizio n.4

Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{x} = 4 \quad &\to \quad \operatorname{sen} 4x \underset{x\to 0}{\text{equivale}} 4x; \\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2} = 1 \quad &\to \quad \operatorname{tg} x^2 \underset{x\to 0}{\text{equivale}} x^2. \end{aligned}$$

Nella somma o differenza di infinitesimi prevale quello di ordine minore, per cui:

$$f(x) = \operatorname{sen} 4x - \operatorname{tg} x^2 \underset{x\to 0}{\text{equivale}} 4x.$$

- Esercizio n.5

Risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= y^3 \frac{1}{x+2y} + \sqrt{3+y^2}; \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 3y^2 \log(x+2y) + y^3 \frac{2}{x+2y} + \frac{xy}{\sqrt{3+y^2}}. \end{aligned}$$

- Esercizio n.6

Per controllare se i tre vettori sono linearmente indipendenti, consideriamo la matrice A formata con i tre vettori e valutiamone il rango.

Risulta:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Siccome l'unico minore di ordine 3 è uguale a zero:

[1] Si noti che il valore della soluzione con 4 cifre decimali esatte è 1.3150

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

il rango non è, certamente, tre; questo basta per affermare che i tre vettori non sono linearmente indipendenti.

Esame di
Metodi di Matematica Applicata (9 CFU)

1. Studiare il comportamento della funzione:
$$f(x) = \sqrt{e^{2x+1} + 3x}$$

2. Risolvere mediante il metodo di Gauss il sistema lineare:
$$\begin{cases} -x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & -2 \end{cases}$$

3. Considerato che la funzione $f(x) = \log^3 x + 3x$ si annulla in $]0, 1[$, valutare un valore approssimato dello zero con un decimale esatto.

4. Determinare l'infinitesimo campione equivalente all'infinitesimo $f(x) = e^{x^2} - 1 + 3 \operatorname{sen} x$ in zero.

5. Calcolare le derivate parziali prime della seguente funzione:
$$f(x, y) = x \log \sqrt{3 + 2y} + y e^{x^2+y^2}$$

6. Controllare se i vettori
$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
sono linearmente indipendenti.

Svolgimento

- Esercizio n.1

- Campo di esistenza: $E[f(x)]$

  L'argomento della radice quadrata esiste per tutti i valori di $\mathbb{R}$; l'unica limitazione è che deve essere maggiore o, tutt'al più, uguale a zero: $e^{2x+1} + 3x \geq 0$. Quest'ultima disequazione non è facilmente risolvibile: proviamo, allora, a studiare, per sommi capi, la funzione $g(x) = e^{2x+1} + 3x$. Risulta:

  1. Campo di esistenza:
  $$E[g(x)] = E[e^{2x+1} + 3x] = \mathbb{R}\,.$$
  2. Comportamento agli estremi:
  $$\lim_{x\to-\infty} e^{2x+1} + 3x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} e^{2x+1} + 3x = +\infty.$$
  3. Monotonia:
  la funzione è somma di funzioni strettamente crescenti e, pertanto, è, anch'essa, strettamente crescente.

  In sintesi, la funzione $g(x)$ è una funzione:

  1. continua in tutto $\mathbb{R}$;
  2. il suo codominio coincide con $\mathbb{R}$;
  3. è strettamente crescente quindi biunivoca

  Deve quindi esistere un valore, indichiamolo con x_0, in cui la funzione vale zero; in più, nell'intervallo $(-\infty, x_0[$ la funzione sarà negativa, nell'intervallo $]x_0, +\infty)$ la funzione sarà positiva. Infine, siccome risulta che $g(0) = e$, è immediato riconoscere che risulta $x_0 < 0$.

  Per quanto rilevato sul comportamento della funzione $g(x)$, possiamo affermare che la funzione $f(x)$ è definita nell'intervallo $[x_0, +\infty)$ dove x_0 è l'unico valore che rende nullo il termine $e^{2x+1} + 3x$:
  $$E[f(x)] = [0, +\infty);$$

- Comportamento agli estremi:
  La funzione è definita nel punto x_0 e vale 0: $f(x_0) = 0$, mentre risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{e^{2x+1} + 3x} = +\infty.$$

- Monotonia:
  la funzione è una funzione composta tra due funzioni strettamente crescenti (funzione radice e $g(x)$) e, pertanto, è , anch'essa, strettamente crescente.

  In sintesi, la funzione $f(x)$ è una funzione:

  1. continua nell'intervallo $[x_0, +\infty)$;
  2. il suo codominio coincide con l'intervallo $[0, +\infty)$;
  3. è strettamente crescente;
  4. è un infinito in $+\infty$ equivalente a e^x, quindi, di ordine arbitrariamente grande: non può, quindi, ammettere asintoti obliqui; inoltre, deve esistere un punto $x_1 \geq x_0$ a partire dal quale essa risulta convessa. La determinazione di tale punto richiederebbe l'analisi della derivata seconda della funzione che appare non agevole. Ipotizzando che tale punto coincida con x_0 ovvero che la funzione sia sempre convessa, possiamo ora tracciare un grafico approssimato di $f(x)$.

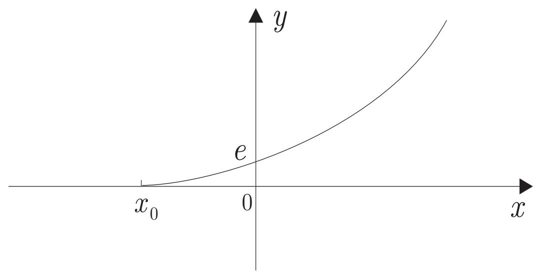

fig. 0.2

- Esercizio n.2

Scriviamo il sistema in forma matriciale e sommiamo la prima riga alla seconda e, moltiplicata per 2, alla terza, ottenendo:

$$\mathrm{A}|b = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & | & 4 \\ 1 & -2 & 6 & | & 2 \\ 2 & -5 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{A}^{(1)}|b^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 9 & | & 6 \\ 0 & 1 & 9 & | & 6 \end{pmatrix}$$

La seconda e la terza riga della matrice completa sono uguali. Il sistema si riduce ad un sistema di due equazioni. Per comodità di lettura, riscriviamolo in forma scalare, cambiando i segni della prima equazione:

$$\begin{cases} x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & = & -4 \\ & & x_2 & + & 9x_3 & = & 6 \end{cases}$$

Appare evidente che si possa assegnare a x_3 un valore arbitrario ($x_3 = t$) e portarlo a destra, ottenendo:

$$\begin{cases} x_1 & - & 3x_2 & = & -4 + 3t \\ & & x_2 & = & 6 - 9t \end{cases}$$

Risulta, quindi, possibile ottenere x_2 dalla II equazione ($x_2 = 6 - 9t$) e x_1 dalla I equazione ($x_1 = 14 - 24t$). Il sistema è, quindi, dotato di infinite soluzioni:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 14 - 24t & 6 - 9t & t \end{pmatrix}, \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

- Esercizio n.3

La funzione $f(x) = \log^3 x + 3x$ si annulla certamente almeno una volta nell'intervallo $]0, 1[$ in quanto sono pienamente soddisfatte le ipotesi del teorema degli zeri:

- la funzione $f(x)$, somma di funzioni continue, è continua nell'intervallo;
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ e $f(1) = 3$ ossia la funzione cambia segno agli estremi dell'intervallo.

Indichiamo con x_0 uno degli zeri della funzione $f(x)$: per trovarne un valore approssimato, applichiamo il metodo di bisezione; organizziamo i calcoli secondo la seguente tabella:

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$
0	0	$-\infty$	1	3	0.5	1.1670
1	0	$-\infty$	0.5	1.1670	0.25	-1.9142
2	0.25	-1.9142	0.5	1.1670	0.375	0.1814
3	0.25	-1.9142	0.375	0.1814	0.3125	-0.6361
4	$\underline{0.3}125$	-0.6361	$\underline{0.3}75$	0.1814	0.3438	

Siccome la prima cifra decimale dei due estremi dell'intervallo ottenuto al 4 passo risulta la stessa, approssimiamo la soluzione con il punto medio di tale intervallo: $x_0 \simeq 0.3438$.[2]

- Esercizio n.4

Risulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2} = 1 \quad \to \quad e^{x^2}-1 \underset{x\to 0}{\text{equivale}} x^2;$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{3\,\mathrm{sen}\,x}{x} = 3 \quad \to \quad 3\,\mathrm{sen}\,x \underset{x\to 0}{\text{equivale}} 3x.$$

Nella somma o differenza di infinitesimi prevale quello di ordine minore, per cui:

$$f(x) = e^{x^2} - 1 + 3\,\mathrm{sen}\,x \underset{x\to 0}{\text{equivale}} 3x.$$

- Esercizio n.5

Risulta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \log\sqrt{3+2y} + 2xye^{x^2+y^2};\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{x}{3+2y} + (1+2y^2)e^{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

- Esercizio n.6

Per controllare se i tre vettori sono linearmente indipendenti, consideriamo la matrice A formata con i tre vettori e valutiamone il rango.

[2] Si noti che il valore della soluzione con 5 cifre decimali esatte è 0.35884

Risulta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siccome l'unico minore di ordine 3 è diverso da zero:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9,$$

il rango è tre; questo basta per affermare che i tre vettori sono linearmente indipendenti.

Esame di
Metodi di Matematica Applicata (9 CFU)

1. Studiare il comportamento della funzione:
$$f(x) = \frac{1}{4e^x - 2x}$$

2. Risolvere mediante il metodo di Gauss il sistema lineare:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

3. Considerato che la funzione $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 3$ si annulla in $]1, 2[$, valutare un valore approssimato dello zero con un decimale esatto.

4. Determinare l'infinitesimo campione equivalente all'infinitesimo $f(x) = (e^{x^4} - 1)\,\mathrm{sen}\, 4x$ in zero.

5. Calcolare le derivate parziali prime della seguente funzione:
$$f(x, y) = (x^2 + 3y)e^{3x+2} + \log \frac{x^2 + 2y}{3x + y^2}$$

6. Controllare se i vettori
$$\underline{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \underline{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \underline{x}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$
sono linearmente indipendenti.

Svolgimento

- Esercizio n.1

- Campo di esistenza: $E[f(x)]$

  Il denominatore della funzione esiste per tutti i valori di $\mathbb{R}$; l'unica limitazione è che deve essere diverso da zero: $4e^x - 2x \neq 0$. Quest'ultima disequazione non è facilmente risolvibile: proviamo, allora, a studiare, per sommi capi, la funzione $g(x) = 4e^x - 2x$. Risulta:

  1. Campo di esistenza:
  $$E[g(x)] = E[4e^x - 2x] = \mathbb{R}\,.$$
  2. Comportamento agli estremi:
  $$\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty} 4e^x - 2x = +\infty, \\ &\lim_{x\to+\infty} 4e^x - 2x = +\infty \quad (\operatorname*{ord}_{x\to+\infty} 4e^x > \operatorname*{ord}_{x\to+\infty} 2x). \end{aligned}$$
  3. Monotonia:
  Non è immediato giudicare il comportamento della funzione: ricorriamo, allora, all'analisi della derivata.
  $$g'(x) = 4e^x - 2 \rightarrow\ g'(x) > 0\,\mathrm{se}\,e^x > \frac{1}{2} \rightarrow\ x > \log\frac{1}{2}.$$
  Risulta, quindi, evidente che la funzione presenta un minimo in $x_0 = \log 1/2 \simeq -0.69$.
  Il valore di questo minimo è allora:
  $$4e^{\log\frac{1}{2}} - 2\log\frac{1}{2} \simeq 3.39 > 0.$$

  Siccome il minimo della funzione è positivo, risulta che la funzione $g(x)$ è sempre positiva.

  Per quanto rilevato sul comportamento della funzione $g(x)$, possiamo affermare che la funzione $f(x)$ è definita in tutto $\mathbb{R}$.

- Comportamento agli estremi:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4e^x-2x}=0 \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4e^x-2x}=0.$$

- Segno della funzione:
  la funzione è la reciproca di una funzione sempre positiva; è, quindi, anch'essa, positiva.

- Monotonia:
  la funzione è la reciproca di una funzione che presenta in x_0 un minimo; pertanto essa presenta in x_0 un massimo; risulta $f(x_0) \simeq 1/3.69 \simeq 0.28$.

  In sintesi, la funzione $f(x)$ è una funzione:

  1. continua in tutto $\mathbb{R}$;
  2. il suo codominio coincide con l'intervallo $]0, f(x_0)]$;
  3. $x_0 \simeq -0.69$ è l'unico punto di massimo: deve esistere un intorno di tale punto in cui la funzione è concava;
  4. agli estremi la funzione tende a zero; in particolare, la funzione è un infinitesimo di ordine 1 in $-\infty$, un infinitesimo di ordine arbitrariamente elevato in $+\infty$; inoltre, devono esistere un intorno di $-\infty$ e uno di $+\infty$ nei quali la funzione è convessa. Devono, quindi, esistere dei punti di flesso. La loro determinazione richiederebbe l'analisi della derivata seconda della funzione che appare non agevole. Ipotizzando che tali punti siano solo due, uno a sinistra di x_0, l'altro a destra, possiamo ora tracciare un grafico approssimato di $f(x)$.

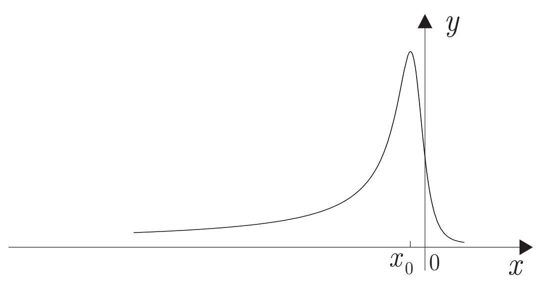

fig. 0.3

- Esercizio n.2

Scriviamo il sistema in forma matriciale e sottraiamo la prima riga dalla seconda e, moltiplicata per 2, dalla terza, ottenendo:

$$\mathrm{A}|b = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -2 & -2 & | & 3 \\ 2 & -3 & -3 & | & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \mathrm{A}^{(1)}|b^{(1)} = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -1 & | & 2 \\ 0 & -1 & -1 & | & 2 \end{array}\right)$$

La seconda e la terza riga della matrice completa sono uguali. Il sistema si riduce ad un sistema di due equazioni. Per comodità di lettura, riscriviamolo in forma scalare, cambiando i segni della seconda equazione:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & -2 \end{array}\right.$$

Appare evidente che si possa assegnare a x_3 un valore arbitrario ($x_3 = t$) e portarlo a destra, ottenendo:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & - & x_2 & = & 1+t \\ & & x_2 & = & -2-t \end{array}\right.$$

Risulta, quindi, possibile ottenere x_2 dalla II equazione ($x_2 = -2-t$) e x_1 dalla I equazione ($x_1 = -1$). Il sistema è, quindi, dotato di infinite soluzioni:

$$\underline{x} = \left(\begin{array}{ccc} -1 & -2-t & t \end{array}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Esercizio n.3

La funzione $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 3$ si annulla certamente almeno una volta nell'intervallo $]1, 2[$ in quanto sono pienamente soddisfatte le ipotesi del teorema degli zeri:

- la funzione $f(x)$, somma di funzioni continue, è continua nell'intervallo;
- $f(1) = -1$ e $f(2) = 1 + \sqrt{2}$ ossia la funzione cambia segno agli estremi dell'intervallo.

Indichiamo con x_0 uno degli zeri della funzione $f(x)$: per trovarne un valore approssimato, applichiamo il metodo di bisezione; organizziamo i calcoli secondo la seguente tabella:

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$
0	1	-1	2	2.4142	1.5	0.4747
1	1	-1	1.5	0.4747	1.25	-0.3195
2	1.25	-0.3195	1.5	0.4747	1.375	0.0632
3	1.25	-0.3195	1.375	0.0632	1.3125	-0.1317
4	$\underline{1.3}125$	-0.1317	$\underline{1.3}75$	0.0632	1.3438	

Siccome la prima cifra decimale dei due estremi dell'intervallo ottenuto al 4 passo risulta la stessa, approssimiamo la soluzione con il punto medio di tale intervallo: $x_0 \simeq 1.3438$.[3]

- Esercizio n.4

Risulta:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^4}-1}{x^4} = 1 \quad \to \quad e^{x^4}-1 \underset{x\to 0}{\text{equivale}} x^4; \\ &\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{x} = 4 \quad \to \quad \operatorname{sen} 4x \underset{x\to 0}{\text{equivale}} 4x. \end{aligned}$$

Il prodotto di infinitesimi equivale al prodotto degli infinitesimi equivalenti dei fattori, per cui:

$$f(x) = (e^{x^4}-1)\operatorname{sen} 4x \underset{x\to 0}{\text{equivale}} 4x^5.$$

- Esercizio n.5

Risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= [2x + 3(x^2+3y)]e^{3x+2} + \frac{3x^2+2xy^2-6y}{(x^2+2y)(3x+y^2)}; \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 3e^{3x+2} + 2\frac{3x-y^2-x^2y}{(x^2+2y)(3x+y^2)}. \end{aligned}$$

- Esercizio n.6

[3] Si noti che il valore della soluzione con 4 cifre decimali esatte è 1.3550

Per controllare se i tre vettori sono linearmente indipendenti, consideriamo la matrice A formata con i tre vettori e valutiamone il rango.

Risulta:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Siccome l'unico minore di ordine 3 è uguale a zero:

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ - & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 0,$$

il rango non è certamente tre; questo basta per affermare che i tre vettori sono linearmente dipendenti.

Esame di
Metodi di Matematica Applicata (9 CFU)

1. Studiare il comportamento della funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x + 4\log x}$$

2. Risolvere mediante il metodo di Gauss il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$$

3. Considerato che la funzione $f(x) = e^{x-1} - 3x$ si annulla in $]0, 1[$, valutare un valore approssimato dello zero con un decimale esatto.

4. Determinare l'infinitesimo campione equivalente all'infinitesimo $f(x) = \log(x^3 + 1) - \sqrt{x}$ in zero.

5. Calcolare le derivate parziali prime della seguente funzione:

$$f(x, y) = xy^3 + \frac{e^x}{\sqrt{x + y}}$$

6. Determinare il rango della matrice:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento

- Esercizio n.1

- Campo di esistenza: $E[f(x)]$

  Il denominatore della funzione esiste per tutti i valori di $x \in]0, +\infty)$; occorre, poi, che sia diverso da zero: $x + 4\log x \neq 0$. Quest'ultima disequazione non è facilmente risolvibile: proviamo, allora, a studiare, per sommi capi, la funzione $g(x) = x + 4\log x$. Risulta:

  1. Campo di esistenza:
  $$E[g(x)] = E[x + 4\log x] =]0, +\infty).$$
  2. Comportamento agli estremi:
  $$\lim_{x\to 0} x + 4\log x = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} x + 4\log x = +\infty$$
  3. Monotonia:
  la funzione è somma di funzioni strettamente crescenti e, pertanto, è, anch'essa, strettamente crescente.

  In sintesi, la funzione $g(x)$ è una funzione:

  1. continua nell'intervallo $]0, +\infty)$;
  2. il suo codominio coincide con $\mathbb{R}$;
  3. è strettamente crescente quindi biunivoca

  Deve quindi esistere un valore, indichiamolo con x_0, in cui la funzione vale zero; in più, nell'intervallo $]0, x_0[$ la funzione sarà negativa, nell'intervallo $]x_0, +\infty)$ la funzione sarà positiva. Siccome in 1 la funzione è positiva, $g(1) = 1$, il punto x_0 deve ricadere nell'intervallo $]0, 1[$.

  Per quanto rilevato sul comportamento della funzione $g(x)$, possiamo affermare che la funzione $f(x)$ è definita in $]0, x_0[\cup]x_0, +\infty]$.

- Comportamento agli estremi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+4\log x}=0,\quad \lim_{x\to x_0^-}\frac{1}{x+4\log x}=-\infty,$$
$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{x+4\log x}=+\infty,\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x+4\log x}=0.$$

- Monotonia:
  la funzione è la reciproca di una funzione strettamente crescente; pertanto essa sarà strettamente decrescente sia nell'intervallo $]0,x_0[$ sia nell'intervallo $]x_0,+\infty)$.

  In sintesi, la funzione $f(x)$ è una funzione:

  1. continua in $]0,x_0[\cup\,]x_0,+\infty]$;
  2. agli estremi 0 e $+\infty$ la funzione tende a zero; in particolare, in zero, il limite vale zero. Risulta, quindi, che $x=0$ è un punto di discontinuità eliminabile, la funzione può essere prolungata in zero assumendo il valore del limite, ossia zero: $f(0)=0$. La funzione è un infinitesimo di ordine 1 in $+\infty$; inoltre tende a zero per valori positivi: deve esistere un intorno di $+\infty$ nel quale la funzione è convessa. I limiti sinistro e destro in x_0 sono, rispettivamente, $-\infty$ e $+\infty$; devono, quindi, esistere un intorno sinistro e uno destro di x_0 nei quali la funzione è, rispettivamente, concava e convessa. Una analisi più accurata richiederebbe lo studio della derivata prima e seconda della funzione, studio che appare non agevole. Ipotizzando che la funzione sia concava in $[0,x_0[$ e convessa in $]x_0,+\infty)$, possiamo ora tracciare un grafico approssimato di $f(x)$.

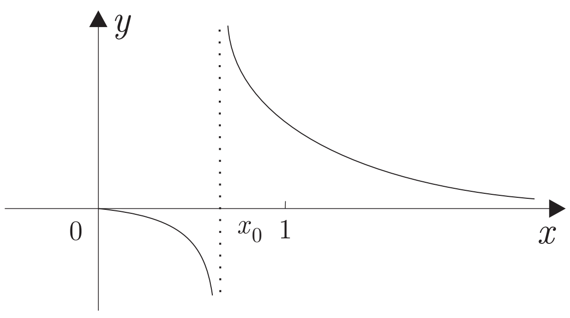

fig. 0.4

- Esercizio n.2

Scriviamo il sistema in forma matriciale e sottraiamo la prima riga, moltiplicata per 2, dalla seconda e, invariata, dalla terza, ottenendo:

$$\mathrm{A}|b = \left(\begin{array}{rrrcr} 1 & -1 & 3 & | & 2 \\ 2 & -3 & -2 & | & 3 \\ 1 & -2 & -6 & | & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \mathrm{A}^{(1)}|b^{(1)} = \left(\begin{array}{rrrcr} 1 & -1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -8 & | & -1 \\ 0 & -1 & -9 & | & -1 \end{array}\right)$$

Sottraiamo, ora, la seconda riga dalla terza:

$$\mathrm{A}^{(1)}|b^{(1)} = \left(\begin{array}{rrrcr} 1 & -1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -8 & | & -1 \\ 0 & -1 & -9 & | & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \mathrm{A}^{(1)}|b^{(1)} = \left(\begin{array}{rrrcr} 1 & -1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -8 & | & -1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{array}\right)$$

Per comodità di lettura, riscriviamo il sistema in forma scalare, cambiando i segni della seconda e della terza equazione:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 8x_3 & = & 1 \\ & & & & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

da cui è, immediato, ricavare a ritroso, $x_3 = 0, x_2 = 1$ e $x_1 = 3$.
Il sistema è, quindi, dotato di un'unica soluzione:

$$\underline{x} = \left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

- Esercizio n.3

La funzione $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 3$ si annulla certamente almeno una volta nell'intervallo $]0, 1[$ in quanto sono pienamente soddisfatte le ipotesi del teorema degli zeri:

- la funzione $f(x)$, somma di funzioni continue, è continua nell'intervallo;
- $f(0) = 0.3679$ e $f(1) = -2$ ossia la funzione cambia segno agli estremi dell'intervallo.

Indichiamo con x_0 uno degli zeri della funzione $f(x)$: per trovarne un valore approssimato, applichiamo il metodo di bisezione; organizziamo i calcoli secondo la seguente tabella:

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$
0	0	0.3679	1.0000	−2.0000	0.5000	−0.8935
1	0	0.3679	0.5000	−0.8935	0.2500	−0.2776
2	0	0.3679	0.2500	−0.2776	0.1250	0.0419
3	0.1250	0.0419	0.2500	−0.2776	0.1875	−0.1188
4	$\underline{0.1}250$	0.0419	$\underline{0.1}875$	−0.1188	0.1563	

Siccome la prima cifra decimale dei due estremi dell'intervallo ottenuto al 4 passo risulta la stessa, approssimiamo la soluzione con il punto medio di tale intervallo: $x_0 \simeq 0.1563$.[4]

- Esercizio n.4

Risulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x^3+1)}{x^3} = 1 \to \log(x^3+1) \underset{x\to 0}{\text{equivale}} x^3,$$

mentre, ovviamente, $\sqrt{x}$ è di ordine $\frac{1}{2}$.

Nella somma o differenza di infinitesimi prevale quello di ordine minore, per cui:

$$f(x) = \log(x^3+1) - \sqrt{x} \underset{x\to 0}{\text{equivale}} -\sqrt{x}.$$

- Esercizio n.5

Risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= y^3 + \frac{e^x(2x+2y-1)}{2\sqrt{(x+y)^3}}; \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 3xy^2 - \frac{e^x}{2\sqrt{(x+y)^3}}. \end{aligned}$$

- Esercizio n.6

[4] Si noti che il valore della soluzione con 5 cifre decimali esatte è 0.14123

La matrice possiede minori di ordine 1, 2 e 3. L'unico minore di ordine 3 è nullo:

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

mentre ha almeno un minore di ordine 2 diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 6.$$

Si ha, quindi, che r(A)=2.