MATEMATICA DI BASE

Pasquale L. De Angelis

Esercizi relativi al capitolo IX

Nel seguito sono riportati alcuni esercizi utili a verificare la qualità della conoscenza acquisita sugli argomenti sviluppati nel capitolo IX del volume.

Si consiglia caldamente di affrontarli solo dopo aver studiato l'intero capitolo, aver compreso gli esempi ivi riportati e risolto gli esercizi di controllo suggeriti.

1. Scrivere l'equazione della retta secante la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ nei punti di ascissa $x_0 = 0$ e $x_1 = \pi/2$.

   Risposta:
   $$y = \frac{2}{\pi}x.$$

2. Controllare se le funzioni:
   $$\text{a) } f(x) = (x-1)^3, \quad \text{b) } f(x) = \sqrt{x-1}, \quad \text{c) } f(x) = x + |x-1|$$
   ammettono derivata in $x_0 = 1$. In caso affermativo, scrivere l'equazione della retta tangente.

   Risposta:
   a) $\mathrm{D}[(x-1)^3]_{x=1} = 0;$ tangente : $y = 0$.
   b) $\mathrm{D}_d[\sqrt{x-1}]_{x=1} = +\infty;$ tangente : $x = 1$.
   c) $\mathrm{D}_d[x + |x-1|]_{x=1} = 2$ e $\mathrm{D}_s[x + |x-1|]_{x=1} = 0$.
   tangente destra : $y = 2x - 1$, tangente sinistra : $y = 1$.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$f_1(x) = \log \cos x,$$

$$f_2(x) = \log x \cos x,$$

$$f_3(x) = \log_x \cos x,$$

$$f_4(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x},$$

$$f_5(x) = \sqrt{\operatorname{sen} \operatorname{tg} x},$$

$$f_6(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x},$$

$$f_7(x) = (\cos x)^x,$$

$$f_8(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$f_9(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}},$$

$$f_{10}(x) = \frac{x}{x + \log x},$$

$$f_{11}(x) = 2^{\frac{1}{e^x + x}},$$

$$f_{12}(x) = \sqrt{\frac{\log x}{x}}.$$

Risposta:

$$
\begin{aligned}
D[\log\cos x] &= -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x};\\
D[\log x\cos x] &= \frac{1}{x}\cos x - \log x \operatorname{sen} x;\\
D[\log_x \cos x] &= -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x\log x} - \frac{\log(\cos x)}{(\log^2 x)\, x};\\
D[\sqrt{\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x}] &= \frac{1}{2\sqrt{(\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x)}}\left(\cos x \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\right);\\
D[\sqrt{\operatorname{sen}\operatorname{tg} x}] &= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)}}(\cos(\operatorname{tg} x))\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right);\\
D[\sqrt{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}] &= \frac{1}{2\sqrt{(\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x)}}\left(\cos x + 1 + \operatorname{tg}^2 x\right);\\
D[(\cos x)^x] &= (\cos x)^x\left(\log(\cos x) - x\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right);\\
D[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}] &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2};\\
D[\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}}] &= -4\frac{\log 3}{(3^x - 3^{-x})^2};\\
D[\frac{x}{x+\log x}] &= \frac{\log x - 1}{(x+\log x)^2};\\
D[2^{\frac{1}{e^x + x}}] &= -2^{\frac{1}{e^x + x}}\frac{\log 2(e^x+1)}{(e^x+x)^2};\\
D[\sqrt{\frac{\log x}{x}}] &= \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{\log x}{x}\right)}}\left(\frac{1-\log x}{x^2}\right).
\end{aligned}
$$

4. Calcolare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = |\operatorname{arctg} x|.$$

Risposta:

$$
D[|\operatorname{arctg} x|] = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & \forall x:\ \operatorname{arctg} x > 0 \iff x > 0\\ \text{non esiste}, & \forall x:\ \operatorname{arctg} x = 0 \iff x = 0\\ -\frac{1}{1+x^2}, & \forall x:\ \operatorname{arctg} x < 0 \iff x < 0 \end{cases}
$$

5. Calcolare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = |x^2 \operatorname{arctg} x|.$$

Risposta:

$$\mathrm{D}[|x^2 \operatorname{arctg} x|] = \begin{cases} 2x \operatorname{arctg} x + \frac{x^2}{1+x^2}, & \forall\, x : \ \operatorname{arctg} x > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 0 \\ 0, & \forall\, x : \ \operatorname{arctg} x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \\ -2x \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{1+x^2}, & \forall\, x : \ \operatorname{arctg} x < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < 0 \end{cases}$$