MATEMATICA DI BASE

Pasquale L. De Angelis

Esercizi relativi al capitolo VI

Nel seguito sono riportati alcuni esercizi utili a verificare la qualità della conoscenza acquisita sugli argomenti sviluppati nel capitolo VI del volume.

Si consiglia caldamente di affrontarli solo dopo aver studiato l'intero capitolo, aver compreso gli esempi ivi riportati e risolto gli esercizi di controllo suggeriti.

1. Ricercare i valori di x per cui risultano valide le seguenti uguaglianze:
   a) $\cos x = -\sqrt{3}/2$; b) $\cos x = 0.9$; c) $\cos x = -1.5$;
   d) $\arccos x = 2\pi/3$; e) $\arccos x = 3$; f) $\arccos x = -1$.

   Risposta:

   a) $x_0 = \arccos(-\sqrt{3}/2) = 5\pi/6$ e $x_k = x_0 + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,
   $\overline{x}_0 = 2\pi - \arccos(-\sqrt{3}/2) = 7\pi/6$ e $\overline{x}_k = \overline{x}_0 + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

   b) $x_0 = \arccos(0.9) \simeq 0.451027$ e $x_k = x_0 + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,
   $\overline{x}_0 = 2\pi - \arccos(0.9) \simeq 5.832158$ e $\overline{x}_k = \overline{x}_0 + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

   c) non esistono valori che verificano l'uguaglianza;

   d) $x = \cos(2\pi/3) = -0.5$;

   e) $x = \cos(3) \simeq -0.989992$;

   f) non esistono valori che verificano l'uguaglianza.

2. Ricercare i valori di x per cui risultano valide le seguenti uguaglianze:
   a) $\operatorname{sen} x = -\sqrt{3}/2$; b) $\operatorname{sen} x = 0.9$; c) $\operatorname{sen} x = -1.5$;
   d) $\operatorname{arcsen} x = -\pi/6$; e) $\operatorname{arcsen} x = 1.5$; f) $\operatorname{arcsen} x = -1.6$.

   Risposta:

   a) $x_0 = \operatorname{arcsen}(-\sqrt{3}/2) = -\pi/3$ e $x_k = x_0 + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,
   $\overline{x}_0 = \pi - \operatorname{arcsen}(-\sqrt{3}/2) = 4\pi/3$ e $\overline{x}_k = \overline{x}_0 + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

b) $x_0 = \text{arcsen}(0.9) \simeq 1.119770$ e $x_k = x_0 + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,
$\overline{x}_0 = \pi - \text{arcsen}(0.9) \simeq 2.021823$ e $\overline{x}_k = \overline{x}_0 + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

c) non esistono valori che verificano l'eguaglianza;

d) $x = \text{sen}(-\pi/6) = -0.5$;

e) $x = \text{sen}(1.5) \simeq 0.997495$;

f) non esistono valori che verificano l'eguaglianza.

3. Ricercare i valori di x per cui risultano valide le seguenti uguaglianze:
a) $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}/3$; b) $\text{tg}\, x = 3.9$; c) $\text{arctg}\, x = -\pi/6$;
d) $\text{arctg}\, x = 1.5$; e) $\text{arctg}\, x = -3$.

Risposta:

a) $x_0 = \text{arctg}(-\sqrt{3}/3) = -\pi/6, x_k = x_0 + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$;

b) $x_0 = \text{arctg}(3.9) \simeq 1.319794, x_k = x_0 + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$;

c) $x = \text{tg}(-\pi/6) = -\sqrt{3}/3 \simeq -0.57735$;

d) $x = \text{tg}(1.5) \simeq 14.101420$;

e) non esistono valori che verificano l'eguaglianza.

4. Ricercare i valori di x per cui risultano valide le seguenti uguaglianze:
a) $\text{cotg}\, x = -\sqrt{3}/3$; b) $\text{cotg}\, x = 3.9$; c) $\text{arccotg}\, x = 3\pi/4$;
d) $\text{arccotg}\, x = 3$; e) $\text{arccotg}\, x = -3$.

Risposta:

a) $x_0 = \text{arccotg}(-\sqrt{3}/3) = 2\pi/3, x_k = x_0 + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$;

b) $x_0 = \text{arccotg}(3.9) \simeq 0.251, x_k = x_0 + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$;

c) $x = \text{cotg}(3\pi/4) = -1$;

d) $x = \text{cotg}(3) \simeq -7.015253$;

e) non esistono valori che verificano l'eguaglianza.

5. Considerato il polinomio $\mathrm{P}_3(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ controllare se $x_1 = 2$ è una radice di P_3 e, in caso affermativo, valutarne la molteplicità .

Risposta: $x_0 = 2$ è una radice di molteplicità tre per P_3.
Risulta:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3.$$

6. Risolvere l'equazione $x^4 + x^3 - x - 1 = 0$.

   Risposta: $x_1 = -1$ è una soluzione dell'equazione. Dividendo per $(x+1)$, si ha $x^4 + x^3 - x - 1 = (x+1)(x^3 - 1)$ da cui l'unica ulteriore soluzione è $x_2 = 1$.

7. Risolvere l'equazione $x^4 + x^3 + x + 1 = 0$.

   Risposta: $x_1 = -1$ è una soluzione dell'equazione. Dividendo per $(x+1)$, si ha $x^4 + x^3 + x + 1 = (x+1)(x^3 + 1)$ per cui x_1 è l'unica soluzione.

8. Fattorizzare e, successivamente, discutere il segno dei seguenti polinomi:

   a) $\mathrm{P}_4(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x$;

   b) $\mathrm{P}_4(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$;

   c) $\mathrm{P}_4(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x$.

   Risposta:

   a) $\mathrm{P}_4(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x^2 + x + 2)$, per cui:
   $\mathrm{P}_4(x) < 0$ per $x \in]-1, 0[$,
   $\mathrm{P}_4(x) = 0$ per $x \in \{-1, 0\}$,
   $\mathrm{P}_4(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1[\cup]0, +\infty)$.

   b) $\mathrm{P}_4(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = (x-2)(x-1)^2(x+1)$, per cui:
   $\mathrm{P}_4(x) < 0$ per $x \in]-1, 1[\cup]1, 2[$,
   $\mathrm{P}_4(x) = 0$ per $x \in \{-1, 1, 2\}$,
   $\mathrm{P}_4(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1[\cup]2, +\infty)$.

   c) $\mathrm{P}_4(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x = x(x-1)(x^2 - x + 2)$, per cui:
   $\mathrm{P}_4(x) < 0$ per $x \in]0, 1[$,
   $\mathrm{P}_4(x) = 0$ per $x \in \{0, 1\}$,
   $\mathrm{P}_4(x) > 0$ per $x \in (-\infty, 0[\cup]1, +\infty)$.