

MATEMATICA DI BASE

Pasquale L. De Angelis

Esercizi relativi al capitolo VII

Nel seguito sono riportati alcuni esercizi utili a verificare la qualità della conoscenza acquisita sugli argomenti sviluppati nel capitolo VII del volume.

Si consiglia caldamente di affrontarli solo dopo aver studiato l'intero capitolo, aver compreso gli esempi ivi riportati e risolto gli esercizi di controllo suggeriti.

1. Risolvere la disequazione $x^4 + x^3 - x - 1 > 0$.

Risposta: Il polinomio si fattorizza come:

$$x^4 + x^3 - x - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

per cui risulta positivo per $x \in (-\infty, -1[\cup]1, +\infty)$.

2. Risolvere la disequazione $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 < 0$.

Risposta: Il polinomio si fattorizza come:

$$x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1),$$

per cui il polinomio è sempre maggiore di zero tranne per $x = -1$ dove risulta uguale a zero.

3. Ricercare i valori di x per cui risultano valide le seguenti disuguaglianze:
a) $x^3 > 8$; b) $x^5 \leq -8$; c) $x^3 < 3$; d) $x^2 > 0$; e) $x^2 > 5$;
f) $x^6 > -1$.

Risposta:

a) Posto $x_0 = \sqrt[3]{8} = 2$, si ha $x \in]x_0, +\infty)$.

b) Posto $x_0 = \sqrt[5]{-8} \simeq -1.5157$, si ha $x \in (-\infty, x_0]$.

c) Posto $x_0 = \sqrt[3]{3} \simeq 1.4422$, si ha $x \in (-\infty, x_0[$.

- d) Posto $x_0 = 0$, si ha $x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$.
 e) Posto $x_1 = -\sqrt{5} \simeq -2.2361$, $x_2 = \sqrt{5} \simeq 2.2361$, si ha:

$$x \in (-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty).$$

 f) $x \in \mathbb{R}$.

4. Ricercare i valori di x per cui risultano valide le seguenti disuguaglianze:
 a) $5^x > 125$; b) $10^x > -3$; c) $(\frac{1}{3})^x \geq 8$; d) $\log_{10} x < \pi$;
 e) $\log_{1/2} x < -2$; f) $\log_3 x > \sqrt{2}$.

Risposta:

- a) Posto $x_0 = \log_5 125 = 3$, si ha $x \in]x_0, +\infty)$.
 b) $x \in \mathbb{R}$.
 c) Posto $x_0 = \log_{1/3} 8 \simeq -1.8928$, si ha $x \in (-\infty, x_0]$.
 d) Posto $x_0 = 10^\pi \simeq 1385.16$, si ha $x \in]0, x_0]$.
 e) Posto $x_0 = (\frac{1}{2})^{-2} = 4$, si ha $x \in]x_0, +\infty)$.
 f) Posto $x_0 = 3^{\sqrt{2}} \simeq 4.7287$, si ha $x \in]x_0, +\infty)$.

5. Ricercare i valori di x per cui risultano valide le seguenti disuguaglianze:
 a) $\cos x > -\sqrt{3}/2$; b) $\cos x \leq 0.9$; c) $\cos x > -1.5$;
 d) $\arccos x < 2\pi/3$; e) $\arccos x > 3$; f) $\arccos x < -1$.

Risposta:

- a) Posto $x_0 = \arccos(-\sqrt{3}/2) = 5\pi/6$, $\bar{x}_0 = 2\pi - \arccos(-\sqrt{3}/2) = 7\pi/6$,
 si ha:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ([k2\pi, x_0 + k2\pi[\cup]\bar{x}_0 + k2\pi, (k+1)2\pi]).$$

 b) Posto $x_0 = \arccos(0.9) \simeq 0.451027$, $\bar{x}_0 = 2\pi - \arccos(0.9) \simeq 5.832158$,
 si ha:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [x_0 + k2\pi, \bar{x}_0 + k2\pi].$$

 c) $x \in \mathbb{R}$.
 d) Posto $x_0 = \cos(2\pi/3) = -0.5$, si ha $x \in]x_0, 1]$.
 e) Posto $x_0 = \cos(3) \simeq -0.989992$, si ha $x \in [-1, x_0[$.
 f) Non esistono valori che verificano la disuguaglianza.

6. Ricercare i valori di x per cui risultano valide le seguenti disuguaglianze:

- a) $\sin x < -\sqrt{3}/2$; b) $\sin x > 0.9$; c) $\sin x < -1.5$;
 d) $\arcsin x > -\pi/6$; e) $\arcsin x < 1.5$; f) $\arcsin x > -1.6$.

Risposta:

- a) Posto $x_0 = \arcsin(-\sqrt{3}/2) = -\pi/3$, $\bar{x}_0 = \pi - \arcsin(-\sqrt{3}/2) = 4\pi/3$,
 si ha:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ([k2\pi - \pi/2, k2\pi - x_0[\cup]k2\pi + \bar{x}_0, k2\pi + 3\pi/2]).$$

 b) Posto $x_0 = \arcsin(0.9) \simeq 1.119769$, $\bar{x}_0 = \pi - \arcsin(0.9) \simeq 2.021822$, si
 ha:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [x_0 + k2\pi, \bar{x}_0 + k2\pi].$$

 c) La disequazione non è mai verificata.
 d) Posto $x_0 = \sin(-\pi/6) = -0.5$, si ha $x \in]x_0, 1]$.
 e) Posto $x_0 = \sin(1.5) \simeq 0.997494$, si ha $x \in [-1, x_0[$.
 f) $x \in [-1, 1]$.

7. Ricercare i valori di x per cui risultano valide le seguenti disuguaglianze:

- a) $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}/3$; b) $\operatorname{tg} x > 3.9$; c) $\operatorname{arctg} x < -\pi/6$;
 d) $\operatorname{arctg} x > -0.3$; e) $\operatorname{arctg} x > -3$.

Risposta:

- a) Posto $x_0 = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}/3) = -\pi/6$, si ha:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\pi/2 + k\pi, x_0 + k\pi[.$$

 b) Posto $x_0 = \operatorname{arctg}(3.9) \simeq 1.319794$, si ha:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]x_0 + k\pi, \pi/2 + k\pi[.$$

 c) Posto $x_0 = \operatorname{tg}(-\pi/6) = -\sqrt{3}/3$, si ha $x \in (-\infty, -\sqrt{3}/3[$.
 d) Posto $x_0 = \operatorname{tg}(-0.3) \simeq -0.291457$, si ha $x \in]x_0, +\infty)$.
 e) $x \in \mathbb{R}$.

8. Ricercare i valori di x per cui risultano valide le seguenti disuguaglianze:

- a) $\operatorname{cotg} x < -\sqrt{3}/3$; b) $\operatorname{cotg} x > 3.9$; c) $\operatorname{arccotg} x > 2\pi/3$;
 d) $\operatorname{arccotg} x \leq 3$; e) $\operatorname{arccotg} x < -3$.

Risposta:

- a) Posto $x_0 = \operatorname{arccotg}(-\sqrt{3}/3) = 2\pi/3$, si ha:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]x_0 + k\pi, \pi + k\pi[.$$

b) Posto $x_0 = \operatorname{arccotg}(3.9) \simeq 0.251003$, si ha:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k\pi, x_0 + k\pi[.$$

c) Posto $x_0 = \cotg(2\pi/3) = -\sqrt{3}/3$, si ha $x \in (-\infty, x_0[$.

d) Posto $x_0 = \cotg(3) \simeq -7.01525$, si ha $x \in]x_0, +\infty)$.

e) Mai verificata.

9. Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $\operatorname{arccotg}(\log_{10}(x+1)) < \pi/2$.

b) $\operatorname{arctg}(\log_{10} x) > 0$.

c) $3^{2x} - 4(3^x) + 3 < 0$.

d) $\log_{1/2}(x^2 - 5x - 4) > -1$.

e) $\log_{10}(x^2 - 3x + 12) \geq 1$.

f) $\sqrt{x^2 + 3x + 6} > 2$.

g) $(\frac{1}{2})^{\log_3 x} < (\frac{1}{2})^3$.

h) $\operatorname{sen}(\log_{10} x) > 0$.

i) $\operatorname{arccotg}(4^x - 1) > \pi/2$.

l) $\operatorname{arctg}(4^x - 4) > 0$.

Risposta:

a) $x \in]0, +\infty)$.

b) $x \in]1, +\infty)$.

c) $x \in]0, 1[$.

d) $x \in]-1, (5 - \sqrt{41})/2[\cup](5 + \sqrt{41})/2, 6[$.

e) $x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

f) $x \in (-\infty, -2[\cup]-1, +\infty)$.

g) $x \in [27, +\infty)$.

h) $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]10^{2k\pi}, 10^{(2k+1)\pi}[$.

i) $x \in (-\infty, 0[$.

l) $x \in]1, +\infty)$.

10. Risolvere le seguenti disequazioni:

- a) $x(\operatorname{arctg}(4^x - 1)) > 0$; b) $x(\operatorname{arctg}(4^x) - 1) > 0$;
 c) $\frac{2^{2x} - 3(2^x) + 2}{\operatorname{arccotg} x - \pi/2} > 0$; d) $\log_{10} x + 2|\log_{10} x| - 1 < 0$;
 e) $\frac{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x - 3)}{\sqrt{x^2 + 3x + 6} - 2} > 0$; f) $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} > 2$;
 g) $|\log_{10}(x - 1)| \operatorname{arctg}(\log_{10}(x) - 1) \leq 0$; h) $(|\operatorname{arctg} x| - 1)(x^2 - 1) < 0$.

Risposta:

- a) $\mathbf{X} = \mathbb{R} - \{0\}$.
 b) $\mathbf{X} = (-\infty, 0[\cup]\log_4(\operatorname{tg} 1), +\infty)$.
 c) $\mathbf{X} = (-\infty, 0[\cup]0, 1[$.
 d) $\mathbf{X} =]0.1, \sqrt[3]{10}[$.
 e) $\mathbf{X} =]-2, -1[\cup]2 - 2\sqrt{2}, 2 - \sqrt{7}[\cup]2 + \sqrt{7}, 2 + 2\sqrt{2}[$.
 f) $\mathbf{X} =](3 - \sqrt{5})/2, (3 + \sqrt{5})/2[$.
 g) $\mathbf{X} =]1, 10]$.
 h) $\mathbf{X} =]-\operatorname{tg} 1, -1[\cup]1, \operatorname{tg} 1[$.