MATEMATICA DI BASE

Pasquale L. De Angelis

Esercizi relativi al capitolo VIII

Nel seguito sono riportati alcuni esercizi utili a verificare la qualità della conoscenza acquisita sugli argomenti sviluppati nel capitolo VIII del volume.

Si consiglia caldamente di affrontarli solo dopo aver studiato l'intero capitolo, aver compreso gli esempi ivi riportati e risolto gli esercizi di controllo suggeriti.

1. Sia $\mathbf{X} =]0, 2]$. Controlliamo se i seguenti valori sono o meno punti di accumulazione per $\mathbf{X}$: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$.

   Risposta: Il punto x_1 non è di accumulazione per $\mathbf{X}$, gli altri sì.

2. Consideriamo una funzione $f(x)$ definita in $\mathbf{X} =]-2, -1[\cup \{x : x = 1/n, n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$. In quali valori di $\overline{\mathbb{R}}$ si può effettuare il limite di f?

   Risposta: $\overline{\mathbf{X}} = [-2, -1] \cup \{0\} \cup \{+\infty\}$.

3. Calcolare i limiti di tutte le funzioni elementari agli estremi del loro campo di esistenza.

Risposta:

$\lim_{x\to-\infty} x^{2n} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x^{2n} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x^{2n+1} = +\infty$

$\lim_{x\to0^+} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{0} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, a > 1$

$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, a > 1$

$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, 0 < a < 1$

$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, 0 < a < 1$

$\lim_{x\to0^+} \log_a x = -\infty, a > 1$

$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty, a > 1$

$\lim_{x\to0^+} \log_a x = +\infty, 0 < a < 1$

$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty, 0 < a < 1$

$\lim_{x\to0^+} x^\alpha = 0^\alpha = 0, \alpha > 0$

$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty, \alpha > 0$

$\lim_{x\to0^+} x^\alpha = +\infty, \alpha < 0$

$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0, \alpha < 0$

$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste

$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste

$\lim_{x\to-\infty} \cos x$ non esiste

$\lim_{x\to+\infty} \cos x$ non esiste

$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{tg} x$ non esiste

$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{tg} x$ non esiste

$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{cotg} x$ non esiste

$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{cotg} x$ non esiste

$\lim_{x\to\pi/2^-} \operatorname{tg} x = +\infty$

$\lim_{x\to\pi/2^+} \operatorname{tg} x = -\infty$

$\lim_{x\to0^-} \operatorname{cotg} x = -\infty$

$\lim_{x\to0^+} \operatorname{cotg} x = +\infty$

$\lim_{x\to\pi/2} \operatorname{tg} x$ non esiste

$\lim_{x\to0} \operatorname{cotg} x$ non esiste

$\lim_{x\to-1} \operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen}(-1) = -\pi/2$

$\lim_{x\to1} \operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen}(1) = \pi/2$

$\lim_{x\to-1} \arccos x = \arccos(-1) = \pi$

$\lim_{x\to1} \arccos x = \arccos(1) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$

$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$

$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$

$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$

4. Calcolare i seguenti limiti:

a) $\lim_{x\to+\infty} e^{\log_{1/2} x}$,

b) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{arccotg} x}$,

c) $\lim_{x\to0} (\operatorname{sen}(x) + 1)^x$,

d) $\lim_{x\to0^+} (\cos x + 1)^{\log x}$,

e) $\lim_{x\to0^+} (\log \operatorname{sen} x)\sqrt{1+x}$,

f) $\lim_{x\to-\infty} (1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x) \operatorname{arctg} x$,

g) $\lim_{x\to\pi} (\cos x)^{x^2)}$,

h) $\lim_{x\to-\infty} (\operatorname{arctg} x)^x$.

Risposta:

a) $\lim_{x\to+\infty} e^{\log_{1/2} x} = 0,$ b) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{arccotg} x} = 0,$

c) $\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen}(x)+1)^x = 1,$ d) $\lim_{x\to 0^+} (\cos x + 1)^{\log x} = 0,$

e) $\lim_{x\to 0^+} (\log \operatorname{sen} x)\sqrt{1+x} = -\infty,$ f) $\lim_{x\to-\infty} (1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x) \operatorname{arctg} x = +\infty,$

g) non esiste, h) non esiste.

5. Calcolare i seguenti limiti:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\operatorname{arctg} x - \pi/2},$ b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}-1}{\operatorname{arctg} x - \pi/2},$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x},$ d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x},$

e) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{x},$ f) $\lim_{x\to 1^-} \frac{\cos x + 1}{\log x},$

g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{x},$ h) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\cos x + 1}{\log x}.$

Risposta:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\operatorname{arctg} x - \pi/2} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty,$ b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}-1}{\operatorname{arctg} x - \pi/2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty,$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x} =$ non esiste, d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$

e) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty,$ f) $\lim_{x\to 1^-} \frac{\cos x + 1}{\log x} = \frac{\cos 1 + 1}{0^-} = -\infty,$

g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty,$ h) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\cos x + 1}{\log x} = \frac{\cos 1 + 1}{0^+} = +\infty.$

6. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x+1}.$$

Risposta: La funzione si presenta come rapporto di due funzioni dove, però, quella a numeratore non ammette limite per x che tende a $+\infty$. Non è, quindi, possibile né applicare il teorema del rapporto né asserire che il limite non esiste. Proviamo ad applicare il criterio del confronto: i valori assunti dalla funzione possono essere circoscritti nel modo seguente:

$$-\frac{x}{x+1} \leq \frac{x \operatorname{sen} x}{x+1} \leq \frac{x}{x+1}.$$

In questo caso, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x+1-1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1} = -1+0 = -1.$$

Analogamente, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Si può, quindi, asserire solo che, se il limite della funzione esiste, allora dovrà essere compreso tra -1 e 1. Per verificarne o meno l'esistenza applichiamo la definizione di limite e controlliamo che la seguente disequazione:

$$\left|\frac{x \operatorname{sen} x}{x+1} - l\right| < \epsilon, \ \forall \epsilon > 0,$$

con $l \in [-1, 1]$, sia soddisfatta in un intorno di $+\infty$ ossia per x sufficientemente grande. Con semplici calcoli, la disequazione diventa:

$$(l-\epsilon)\frac{x+1}{x} < \operatorname{sen} x < (l+\epsilon)\frac{x+1}{x}.$$

Siccome, al crescere di x, la funzione seno assume tutti i valori compresi tra -1 e 1, la disuguaglianza precedente potrà essere soddisfatta se, per ogni scelta di $l \in [-1, 1]$ e $\epsilon > 0$, risulta:

$$(l-\epsilon)\frac{x+1}{x} < -1, \quad 1 < (l+\epsilon)\frac{x+1}{x}.$$

Notando che:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1,$$

e, quindi, che, per x abbastanza grande:

$$1-\epsilon < \frac{x+1}{x} < 1+\epsilon,$$

risulta:

$$(l-\epsilon)(1-\epsilon) < -1, \quad 1 < (l+\epsilon)(1+\epsilon).$$

Quest'ultime relazioni sono evidentemente false per ϵ sufficientemente piccolo. Si conclude che non esiste il limite proposto.