

MATEMATICA DI BASE

Pasquale L. De Angelis

Esercizi relativi al capitolo XI

Nel seguito sono riportati alcuni esercizi utili a verificare la qualità della conoscenza acquisita sugli argomenti sviluppati nel capitolo XI del volume.

Si consiglia caldamente di affrontarli solo dopo aver studiato l'intero capitolo, aver compreso gli esempi ivi riportati e risolto gli esercizi di controllo suggeriti.

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x - 2x^3, & \text{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + x - 2x^3, \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 - 2x^3 + 3, & \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 - 2x^3 + 3, \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 100x^2 - 100x, & \text{f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 100x^2 - 100x. \end{array}$$

Risposta:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x - 2x^3 = -\infty, & \text{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + x - 2x^3 = +\infty, \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 - 2x^3 + 3 = +\infty, & \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 - 2x^3 + 3 = +\infty, \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 100x^2 - 100x = +\infty, & \text{f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 100x^2 - 100x = -\infty. \end{array}$$

2. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 5x^4 + 2x^3}{3x^2 - 2x^4 + 3x}, & \text{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - 5x^4 + 2x^3}{3x^2 - 2x^4 + 3x}, \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 4x^4 - x^3}{x^3 - 2x + 3}, & \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 4x^4 - x^3}{x^3 - 2x + 3}, \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^2 - 2x^3}{3x^2 - 2x^4 + 3}, & \text{f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^2 - 2x^3}{3x^2 - 2x^4 + 3}. \end{array}$$

Risposta:

$$\begin{aligned}
\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 5x^4 + 2x^3}{3x^2 - 2x^4 + 3x} &= \frac{5}{2}, & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - 5x^4 + 2x^3}{3x^2 - 2x^4 + 3x} &= \frac{5}{2}, \\
\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 4x^4 - x^3}{x^3 - 2x + 3} &= +\infty, & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 4x^4 - x^3}{x^3 - 2x + 3} &= -\infty, \\
\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^2 - 2x^3}{3x^2 - 2x^4 + 3} &= 0, & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^2 - 2x^3}{3x^2 - 2x^4 + 3} &= 0.
\end{aligned}$$

3. Controllare se le funzioni:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \operatorname{arctg} x, \quad f_3(x) = \frac{1}{x-1},$$

sono infiniti o infinitesimi in qualche punto in cui può essere effettuato il limite.

Risposta: La funzione x è infinitesima in zero, infinita in $\pm\infty$. La funzione $\operatorname{arctg} x$ è infinitesima in zero. La funzione $\frac{1}{x-1}$ è infinita in uno, infinitesima in $\pm\infty$.

4. Utilizzando i limiti riportati nella tabella dei limiti notevoli riportati a pagina 203 del testo (capitolo VIII), determinare gli ordini degli infiniti che compongono limiti ivi presenti nonché gli eventuali infiniti ad essi equivalenti.

Risposta:

	Infinito	x_0	ordine	infinito equivalente
a)	$\log_a x$	$+\infty$	arbitrariamente piccolo	—
b)	$\log_a x$	0	arbitrariamente piccolo	—
c)	$a^x, a > 1$	$+\infty$	arbitrariamente grande	—
d)	$a^x, 0 < a < 1$	$-\infty$	arbitrariamente grande	—

5. Calcolare l'ordine dei seguenti infiniti in $+\infty$ e scrivere gli eventuali infiniti campione equivalenti:

a) $f(x) = x^2 e^x$; b) $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$; c) $f(x) = x\sqrt{x^4 + 1}$.

Risposta:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) > k, \forall k > 0$;
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $f(x)$ equivale x^2 ;
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, $f(x)$ equivale x^3 ;

6. Calcolare i seguenti limiti:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 5x^4 + 2x^3}{3x^2 - 2x^4 + 3 \cdot 2^x}$, b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{0.3^x - 5x^4 + 2x^3}{3x^2 - 2x^4 + 3 \cdot 0.2^x}$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10^x + 4x^4 - x^3}{x^3 - 2x - 10^x}$, d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot 0.1^x + 4x^4 - x^3}{x^3 - 2x + 0.1^x}$,
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x^3 - 3^x}{3x^2 - 2x^4 + 5^x}$, f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x^3 - 0.3^x}{3x^2 - 2x^4 + 0.5^x}$,
 g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$, h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x + 1}$.

Risposta:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 5x^4 + 2x^3}{3x^2 - 2x^4 + 3 \cdot 2^x} = +\infty$, b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{0.3^x - 5x^4 + 2x^3}{3x^2 - 2x^4 + 3 \cdot 0.2^x} = 0$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10^x + 4x^4 - x^3}{x^3 - 2x - 10^x} = -1$, d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot 0.1^x + 4x^4 - x^3}{x^3 - 2x + 0.1^x} = 2$,
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x^3 - 3^x}{3x^2 - 2x^4 + 5^x} = 0$, f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x^3 - 0.3^x}{3x^2 - 2x^4 + 0.5^x} = -\infty$,
 g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = 1$, h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x + 1} = 0$.

7. Utilizzando i limiti riportati nella tabella dei limiti notevoli riportati a pagina 203 del testo (capitolo VIII), determinare gli ordini degli infinitesimi ivi presenti nonché gli eventuali infinitesimi campione equivalenti.

Risposta:

	Infinitesimo	x_0	ordine	infinitesimo equivalente
a)	$\operatorname{tg} x$	0	1	x
b)	$1 - \cos x$	0	2	$\frac{1}{2}x^2$
c)	$\arcsen x$	0	1	x
d)	$\operatorname{arctg} x$	0	1	x
e)	$\log_a(1+x)$	0	1	$x \log_a e$
f)	$\log(1+x)$	0	1	x
g)	$a^x - 1$	0	1	$x \log a$
h)	$e^x - 1$	0	1	x
i)	$a^x, a > 1$	$-\infty$	$> k, \forall k > 0$	—
l)	$a^x, 0 < a < 1$	$+\infty$	$> k, \forall k > 0$	—

8. Calcolare l'ordine e gli eventuali infinitesimi campione equivalenti dei seguenti infinitesimi in zero:

a) $f(x) = x\sqrt{1 - \cos x}$; b) $f(x) = \log^2(1+x)(10^x - 1)$;

c) $f(x) = \operatorname{tg} x \sqrt{\sin^4 x}$.

Risposta:

a) $\operatorname{ord}_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$, $f(x)$ equivale $\sqrt{0.5}x^2$;

b) $\operatorname{ord}_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$, $f(x)$ equivale $x^3 \log 10$;

c) $\operatorname{ord}_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$, $f(x)$ equivale x^3 .

9. Calcolare i seguenti limiti:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(x-1)}{2(x-1) \log(x^2)}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x\sqrt{x+1} + \sin(x+1)}{x+1}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 10^x \log^2(1+x)}{x^3 + \operatorname{tg}^4 x}$.

Risposta:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}^2(x-1)}{2(x-1)\log(x^2)} = \frac{1}{4}; \\ \text{b)} \quad & \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x\sqrt{x+1} + \operatorname{sen}(x+1)}{x+1} = 0; \\ \text{c)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 10^x \log^2(1+x)}{x^3 + \operatorname{tg}^4 x} = 1. \end{aligned}$$

10. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x}.$$

Risposta: Il limite si presenta nella forma $0 \cdot (+\infty)$ che si può ricondurre al seguente rapporto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x},$$

che si presenta in forma indeterminata $+\infty / (+\infty)$. Applicando la regola di L'Hôpital, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-1}{x^2} e^{1/x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty,$$

da cui:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = +\infty.$$

11. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{1/x}; & \text{b)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^-} \log(-x) e^{1/x}; \\ \text{c)} \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \sqrt{x^2 + 1}; & \text{d)} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/2)^x 3^x. \end{aligned}$$

Risposta:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = 0; & \text{b)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^-} \log(-x) e^{1/x} = 0; \\ \text{c)} \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \sqrt{x^2 + 1} = 0; & \text{d)} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/2)^x 3^x = +\infty. \end{aligned}$$

12. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x)^{1/x}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} |\log(x)|^x; \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1}^{\log(1+x)}; & \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2(1 + e^x)^x. \end{array}$$

Risposta:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x)^{1/x} = 1; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} |\log(x)|^x = 1; \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1}^{\log(1+x)} = 1; & \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x)^x = 2. \end{array}$$

13. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\operatorname{arctg} x} \log x; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \log 2x - \log(e^x - 1); \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x}; & \text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{\log^2(1+x)}; \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \sqrt{x^2 + 1}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 1} \log x \cdot \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x} - 1}; \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \pi/2}{\log(1 + \frac{1}{x})}; & \text{h)} \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arccotg}(\frac{1}{x}) \log x^2. \end{array}$$

Risposta:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\operatorname{arctg} x} \log x = 0; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \log 2x - \log(e^x - 1) = \log 2; \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x} = -2; & \text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{\log^2(1+x)} = 0; \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \sqrt{x^2 + 1} = 0; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 1} \log x \cdot \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x} - 1} = 6; \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \pi/2}{\log(1 + \frac{1}{x})} = -1; & \\ \text{h)} \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arccotg}(\frac{1}{x}) \log x^2 & \text{ma } \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arccotg}(\frac{1}{x}) \log x^2 = -\infty \\ & \text{e } \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arccotg}(\frac{1}{x}) \log x^2 = 0. \end{array}$$