

MATEMATICA DI BASE

Pasquale L. De Angelis

Esercizi relativi al capitolo XIV

Nel seguito sono riportati alcuni esercizi utili a verificare la qualità della conoscenza acquisita sugli argomenti sviluppati nel capitolo XIV del volume.

Si consiglia caldamente di affrontarli solo dopo aver studiato l'intero capitolo, aver compreso gli esempi ivi riportati e risolto gli esercizi di controllo suggeriti.

1. Costruire il polinomio di Taylor di grado 4 relativo a:

- a) $\cos x$ e di punto iniziale $x_0 = 0$,
- b) $\log x$ e di punto iniziale $x_0 = 1$,
- c) $\log(1 - x)$ e di punto iniziale $x_0 = 0$,
- d) $\log(1 + x)$ e di punto iniziale $x_0 = 0$,
- e) e^x e di punto iniziale $x_0 = 1$.

Risposta:

- a) $P_{4,0}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$,
- b) $P_{4,1}(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{1}{4}(x - 1)^4$,
- c) $P_{4,0}(x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$,
- d) $P_{4,0}(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$,
- e) $P_{4,1}(x) = e + e(x - 1) + \left(\frac{1}{2}e\right)(x - 1)^2 + \left(\frac{1}{6}e\right)(x - 1)^3 + \left(\frac{1}{24}e\right)(x - 1)^4$.

2. Costruire un polinomio di Taylor (di punto iniziale e grado opportuni) in grado di approssimare la funzione $f(x) = \cos x$ nell'intervallo $[0, 1]$ con un errore inferiore a $1/100$.

Risposta: Fissando come punto iniziale $x_0 = 0$, si ha che il resto è

minore di un centesimo se il polinomio è di grado 4. Si ha, pertanto:

$$P_{4,0}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4,$$

e risulta:

$$|\cos x - P_{4,0}(x)| < \frac{1}{100}, \quad x \in [0, 1].$$