MATEMATICA DI BASE

Pasquale L. De Angelis

Esercizi relativi al capitolo XV

Nel seguito sono riportati alcuni esercizi utili a verificare la qualità della conoscenza acquisita sugli argomenti sviluppati nel capitolo XV del volume.

Si consiglia caldamente di affrontarli solo dopo aver studiato l'intero capitolo, aver compreso gli esempi ivi riportati e risolto gli esercizi di controllo suggeriti.

1. Valutare le derivate parziali prime della funzione:

$$f(x,y) = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}.$$

Risposta:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{2\sqrt{y}\sqrt{x}+y}{\sqrt{x}}. \\ f'_y(x,y) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{2\sqrt{y}\sqrt{x}+x}{\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

2. Valutare le derivate parziali prime della funzione:

$$f(x,y) = \cos x \operatorname{sen} y + \cos(x+y).$$

Risposta:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - \operatorname{sen}(x+y). \\ f'_y(x,y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen}(x+y). \end{aligned}$$

3. Valutare le derivate parziali prime della funzione:

$$f(x,y) = \cos x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(\sqrt{x}+y).$$

Risposta:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= -\tfrac{1}{2}\tfrac{2(\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\sqrt{x}-\cos\left(\sqrt{x}+y\right)}{\sqrt{x}}. \\ f'_y(x,y) &= \cos x \cos y + \cos\left(\sqrt{x}+y\right). \end{aligned}$$

4. Valutare le derivate parziali prime della funzione:

$$f(x,y) = e^{x+2y}\cos(2x+y).$$

Risposta:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= e^{x+2y}\cos(2x+y) - 2e^{x+2y}\operatorname{sen}(2x+y). \\ f'_y(x,y) &= 2e^{x+2y}\cos(2x+y) - e^{x+2y}\operatorname{sen}(2x+y). \end{aligned}$$

5. Valutare le derivate parziali prime della funzione:

$$f(x,y) = (x^2-3y)\operatorname{sen}(x^3+4y).$$

Risposta:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x\operatorname{sen}\left(x^3+4y\right) + 3\left(\cos\left(x^3+4y\right)\right)x^4 - 9\left(\cos\left(x^3+4y\right)\right)x^2y. \\ f'_y(x,y) &= -3\operatorname{sen}\left(x^3+4y\right) + 4\left(\cos\left(x^3+4y\right)\right)x^2 - 12\left(\cos\left(x^3+4y\right)\right)y. \end{aligned}$$

6. Valutare le derivate parziali prime della funzione:

$$f(x,y) = x\sqrt{x^2+xy} + y\sqrt{x+y}.$$

Risposta:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{4x^2\sqrt{x+y}+3x\sqrt{x+y}y+y\sqrt{x(x+y)}}{\sqrt{x(x+y)}\sqrt{x+y}}. \\ f'_y(x,y) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{x^2\sqrt{x+y}+2\sqrt{x(x+y)}x+3y\sqrt{x(x+y)}}{\sqrt{x(x+y)}\sqrt{x+y}}. \end{aligned}$$

7. Valutare le derivate parziali prime della funzione:
$$f(x,y) = x\log(x^3y+4y).$$
Risposta:
$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \tfrac{\left(\log y\left(x^3+4\right)\right)x^3+4\log y\left(x^3+4\right)+3x^3}{x^3+4}. \\ f'_y(x,y) &= \tfrac{x}{y}. \end{aligned}$$

8. Valutare le derivate parziali prime della funzione:
$$f(x,y) = \frac{y^3e^{xy}}{x-3y}.$$
Risposta:
$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= y^3e^{xy}\tfrac{xy-3y^2-1}{(x-3y)^2}. \\ f'_y(x,y) &= y^2e^{xy}\tfrac{3x-6y+x^2y-3xy^2}{(x-3y)^2}. \end{aligned}$$

9. Valutare le derivate parziali prime della funzione:
$$f(x,y) = \frac{\operatorname{arctg}(\frac{x}{y})}{\frac{x}{y}}.$$
Risposta:
$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= -y\tfrac{-xy+\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)y^2+\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)x^2}{(y^2+x^2)x^2}. \\ f'_y(x,y) &= \tfrac{-xy+\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)y^2+\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)x^2}{(y^2+x^2)x}. \end{aligned}$$

10. Valutare le derivate parziali prime della funzione:
$$f(x,y) = \frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{x+y}.$$
Risposta:
$$f'_x(x,y) = -\tfrac{-x-y+\operatorname{arctg}(x+y)+(\operatorname{arctg}(x+y))x^2+2(\operatorname{arctg}(x+y))xy+(\operatorname{arctg}(x+y))y^2}{(1+x^2+2xy+y^2)(x+y)^2}.$$
$$f'_y(x,y) = -\tfrac{-x-y+\operatorname{arctg}(x+y)+(\operatorname{arctg}(x+y))x^2+2(\operatorname{arctg}(x+y))xy+(\operatorname{arctg}(x+y))y^2}{(1+x^2+2xy+y^2)(x+y)^2}.$$

11. Calcolare l'hessiano della funzione:

$$f(x,y) = xe^y.$$

Risposta: L'hessiano della funzione $f(x,y)$ è il determinate della marice formata con le sue derivate parziali seconde. Risulta:

$$\det\begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^y \\ e^y & xe^y \end{vmatrix} = -e^{2y}.$$

12. Valutare la presenza di minimi o massimi relativi per la funzione;:

$$f(x,y) = x(e^y - 1).$$

Risposta: Le derivate parziali primi della funzione $f(x,y)$ sono:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) &= e^y - 1 \\ f'_y(x,y) &= xe^y \end{cases}$$

e, banalmente, si annullano, contemporaneamente, solo nell'origine.

L'hessiano della funzione $f(x,y)$ coincide con quello dell'esercizio 11.:

$$\det\begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^y \\ e^y & xe^y \end{vmatrix} = -e^{2y}.$$

Siccome l'hessiano è sempre minore di zero, nell'origine la funzione non presenta né un massimo né un minimo relativo; l'origine è punto di sella della funzione.