MATEMATICA DI BASE

Pasquale L. De Angelis

Esercizi relativi al capitolo XVII

Nel seguito sono riportati alcuni esercizi utili a verificare la qualità della conoscenza acquisita sugli argomenti sviluppati nel capitolo XVII del volume.

Si consiglia caldamente di affrontarli solo dopo aver studiato l'intero capitolo, aver compreso gli esempi ivi riportati e risolto gli esercizi di controllo suggeriti.

1. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 9 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \end{cases}$$

Risposta: Sistema incompatibile. Applicando la trasformazione di Gauss, l'ultima equazione diventa impossibile.

2. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

Risposta: Il sistema ammette un'unica soluzione:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T .$$

3. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 10 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 10 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 10 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 10 \end{cases}$$

Risposta: Sistema dotato di infinite soluzioni. Applicando la trasformazione di Gauss, la penultima e l'ultima equazioni diventano coincidenti. Il sistema si riduce allora a:

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 10 \\ & & x_2 & - & 6x_3 & - & 5x_4 & = & -10 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{cases}$$

che, ponendo $x_4 = t$, ammette le seguenti soluzioni:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} t & 2-t & 2-t & t \end{pmatrix}^T, \ \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

4. Controllare se i seguenti vettori sono ortogonali:

a) $\underline{a} = (1, 1, 3)$, $\underline{b} = (1, 2, -1)$; b) $\underline{c} = (1, -1, 2)$, $\underline{d} = (2, 1, -1)$.

Risposta:

a) Vettori ortogonali;

b) Vettori non ortogonali.

5. Calcolare i determinanti delle seguenti matrici:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Risposta:

$$\det(\mathrm{A}) = -2, \quad \det(\mathrm{B}) = 11.$$

6. Calcolare, se esistono, le matrici inverse delle matrici A e B:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Risposta:

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Determinare il rango della matrice:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Risposta: La matrice possiede minori di ordine 1, 2 e 3. Siccome tutti i quattro minori di ordine 3 sono uguali a zero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 7 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ -3 & 7 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

mentre ha almeno un minore di ordine 2 diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9,$$

si ha che r(A)=2.

8. Assegnati i vettori:

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

controllare se costituiscono una base per $\mathbb{R}^3$.

Risposta: I vettori costituiscono una base per $\mathbb{R}^3$.

9. Assegnato il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases},$$

decidere, tramite il determinante di A, se ammette soluzione e, in caso affermativo, determinarne le componenti.

Risposta: Il sistema ammette un'unica soluzione di componenti $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$.

10. Assegnato il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases},$$

decidere, tramite il determinante di A, se ammette soluzione e, in caso affermativo, determinarne le componenti.

Risposta: Non è possibile decidere sull'esistenza o meno di soluzioni.

11. Considerato il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases},$$

controllare se risulta compatibile.

Risposta: Non compatibile in quanto r(A)=2 e r(A_b)=3.

12. Considerato il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases},$$

controllare se risulta compatibile.

Risposta: Compatibile.